Université Paris 7-Diderot — **Premier semestre 2007-2008**
Licence 1ère année — **MK1 - Maple**

EXAMEN DU 9/01/2008

L'examen dure deux heures. Il y a deux types de questions : celles à rédiger sous Maple, celles à rédiger sur une copie à part (avec la marque (*)).
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.
Comme toujours, l'aide est disponible ainsi que vos feuilles de TP.
Dans votre syntaxe tenez compte des types demandés : listes, matrices, séquences...

Exercice 1. (*) Soit q un nombre complexe différent de 1, et n un entier strictement positif. Démonter que : $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Vérifier avec Maple que la formule est correcte pour $q = 12$.

Exercice 2. Construire en utilisant la commande *seq* les **listes** suivantes :
- $[2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]$
- $[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19]$

Exercice 3.

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sin(\sinh(x)) - \sinh(\tan(x))$ à l'ordre 7 en 0.
2) $g(x) = \cos(x)^{\tan(x)}$ à l'ordre 11 en 0.
3) $h(x) = \sin(\cos(x))$ à l'ordre 6 en $\frac{\pi}{2}$.

Afficher sur un même graphique la fonction h et son polynôme de Taylor de degré 6 en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. Partie de dé

Un dé a six faces numérotées de 1 à 6. Le score est le nombre qui apparaît sur la face supérieure. On simule deux parties de dé : deux joueurs tirent 100 fois de suite un dé parfait, où chaque fâce a la même probabilité d'apparaître. Avec Maple, créer deux **listes** nommées *partie1* et *partie2* , chacune de taille 100, de nombres entiers tirés aléatoirement entre 1 et 6. Evaluer et comparer la moyenne des scores obtenues dans chaque partie.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{7x+15}{2x+8}$.

1) Définir la fonction f dans Maple.
2) (*)Donner (sans Maple) l'ensemble de définition de f. Vérifier (avec Maple) que f est continue sur son ensemble de définition.
3) Tracer sur un même graphe la fonction f et la fonction $x \mapsto x$ (la première en vert, la seconde en bleu), sur l'intervalle (en abscisse) $[-3.5, 5]$.
4) Trouver l(es) abscisse(s) du(des) point(s) d'intersection des deux courbes, en utilisant la commande de résolution d'équation.

5) Soit u la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

En utilisant la fonction f, définir la suite u dans une procédure qui prend en entrée n. Cette procédure devra retourner un message d'erreur si $n \leq 0$ (et la valeur exacte de u_n sinon).

6) Afficher la séquence des valeurs approchées des 15 premières termes de la suite. Que constatez-vous ?

7) À l'aide d'une boucle *while*, trouver le plus petit entier m tel que $|u_m - \frac{5}{2}| \leq 10^{-100}$.

EXERCICE 6. Ecrire une procédure nommée Pascal, qui prend en entrée un entier n et qui renvoit une matrice M de taille $n \times n$, dont le terme général vaut :

$$\begin{cases} M(i,j) = 0 \text{ si j>i} \\ M(i,j) = C_i^j \text{sinon} \end{cases}$$

Donner la valeur de la somme de chaque ligne avec Maple. (*) Démontrer ce résultat. Rappel : C_i^j est le coefficient binômiale.

EXERCICE 7.

1) Écrire une procédure (ou une fonction) appelée *differences* qui prend en entrée une liste L de réels, et qui retourne la liste M des différences successives des nombres de la liste L. Exemple : $L = [2\ 7\ 10\ 23\ 27]$ doit donner $M = [5\ 3\ 13\ 4]$. Le k-ième élément de M doit être la différence entre les $(k+1)$-ième et k-ième éléments de L.

2) Écrire une procédure *itere* qui prend en entrée une liste L et un entier naturel n, et qui retourne le n-ième itéré de la procédure *differences* appliquée à L. Par exemple, si L est comme dans la question précédente, on a $itere(L,0) = L$, $itere(L,1) = differences(L) = M$, et $itere(L,2) = differences(M) = [-2\ 10\ \ -9]$. On pourra utiliser une procédure récursive, ou une boucle *for*.

   Tester cette procédure sur des exemples simples.

3) Calculer *itere(L,n)* dans les cas suivants :
   - L est la liste des carrés des entiers de 1 à 30, et $n = 2$;
   - L est la liste des cubes des entiers de 6 à 21, et $n = 3$;
   - L est la liste des puissances quatrièmes des entiers de 1 à 13, et $n = 4$;
   - L est la liste des puissances dixièmes des entiers de 1 à 30, et $n = 10$.

4) (*) Que se passe-t-il ? Formulez une conjecture précise sur la situation. (indication : $3628800 = 10!$). Vous pouvez tester d'autres exemples du même type pour vous faire un idée.