Université Paris 7-Diderot — **Premier semestre 2007-2008**
Licence 1ère année — **MK1 - Maple**

EXAMEN du 11/01/2008

L'examen dure deux heures. Il y a deux types de questions : celles à rédiger sous Maple, celles à rédiger sur une copie à part (avec la marque (*)).
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.
Comme toujours, l'aide est disponible ainsi que vos feuilles de TP.
Dans votre syntaxe tenez compte des types demandés : listes, matrices, séquences...

Exercice 1. (*) Soit $x \in]0, 2\pi[$, et n un entier strictement positif. Démonter que : $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}$, où $i^2 = -1$.

Vérifier avec Maple que la formule est correcte pour $n = 100, x = \pi$ puis pour $n = 200, x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2. Construire en utilisant la commande *seq* les **listes** suivantes :

- $[3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187]$
- $[9, 16, 23, 30, 37, 44]$

Exercice 3. Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sin(\sinh(x)) + x^3$ à l'ordre 7 en 0.
2) $g(x) = \sin(x)^{\tan(x)}$ à l'ordre 7 en 0.
3) $h(x) = \exp(\cos(x))$ à l'ordre 6 en $\frac{\pi}{2}$.

Afficher sur un même graphique la fonction h et son polynôme de Taylor de degré 6 en $\frac{\pi}{2}$. Enfin, donner la valeur de $\int_0^{2\pi} h(x)dx$

Exercice 4. Promenade aléatoire

On suppose qu'une personne se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, en partant du point 0. A chaque étape de la promenade, elle tire aléatoirement un nombre dans $\{-1, 1\}$. Si le résultat est $+1$ (respectivement -1) la personne se déplace d'une unité vers la droite depuis sa position (respectivement la personne se déplace d'une unité vers la gauche). Elle s'arrête quand elle atteint 5.

Représenter la trajectoire de cette personne par une **liste** L d'entiers dont le premier élément est zéro, et le terme d'indice i est la position à l'étape i. Donner L et le nombre d'étapes qu'il a fallu pour atteindre 5.

Conseil : On pourra utiliser la commande *rand*.

Exercice 5. (*) Donner une condition pour que trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 représentent trois points alignés dans le plan complexe.

Créer une procédure Maple qui prend en entrée trois points et qui renvoit un booléen « true » si la proposition est vraie, et « false » sinon.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$.

1) Définir la fonction f dans Maple.
2) (*)Donner (sans Maple) l'ensemble de définition de f. Vérifier (avec Maple) que f est continue sur son ensemble de définition.
3) Tracer sur un même graphe la fonction f et la fonction $x \mapsto x$ (la première en vert, la seconde en bleu), sur l'intervalle (en abscisse) $]-10, 10[$.
4) Trouver l(es) abscisse(s) du(des) point(s) d'intersection des deux courbes, en utilisant la commande de résolution d'équation.
5) Soit u la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

En utilisant la fonction f, définir la suite u dans une procédure qui prend en entrée n. Cette procédure devra retourner un message d'erreur si $n \leq 0$ (et la valeur exacte de u_n sinon).
6) Afficher la séquence des valeurs approchées des 15 premières valeurs de la suite. Que constatez-vous ?
7) À l'aide d'une boucle *while*, trouver le plus petit entier m tel que $|u_m - 1| \leq 10^{-10}$.

Exercice 7.

1) Définir la matrice $A = (\frac{i-j}{i+j})_{1\leq i,j\leq 5}$ sans calculer les 25 termes un à un.
2) Calculer le rang et la trace de la matrice A.
3) Résoudre le systeme linéaire :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Ecrire une procédure qui prend en entrée un entier n et qui renvoit une matrice M de taille $n \times n$, dont les termes valent :

$$\begin{cases} M(i,j) = 0 \text{ si j>i} \\ M(i,j) = 10^{\min(i,j)-1} \text{ sinon} \end{cases}$$

Donner la valeur de la somme de chaque ligne avec Maple. (*) Démontrer ce résultat.