Université Paris 7-Diderot | **Premier semestre 2007-2008**
Licence 1ère année | **MK1 - Maple**

EXAMEN DU 18/01/2008

L'examen dure deux heures. Il y a deux types de questions : celles à rédiger sous Maple, celles à rédiger sur une copie à part (avec la marque (*)).
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.
Comme toujours, l'aide est disponible ainsi que vos feuilles de TP.
Dans votre syntaxe tenez compte des types demandés : listes, matrices, séquences...
A la fin de l'examen imprimez votre travail et glissez les feuilles imprimées dans votre copie. Surtout pensez à sauvegarder votre travail régulièrement.

Exercice 1. (*) Démontrer que pour tout n un entier positif , $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, où C_n^k est le coefficient binomial.

Vérifier avec Maple que la formule est correcte pour $n = 12$ et $n = 133$.

Exercice 2. Construire en utilisant la commande « seq » les **listes** suivantes :
- $[11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39]$
- $[0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186]$

Exercice 3. Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \exp(\ln(x + 1) + x)$ à l'ordre 5 en 0.
2) $g(x) = (x + 1)^{\tan(x)}$ à l'ordre 7 en 0.
3) $h(x) = \sin(\cos(x))$ à l'ordre 6 en $\frac{\pi}{2}$.

Afficher sur un même graphique la fonction h et son polynôme de Taylor de degré 6 en $\frac{\pi}{2}$. Enfin, donner la valeur de $\int_0^{\pi} h(x)dx$

Exercice 4. Promenade aléatoire

On suppose qu'une personne se promène dans le plan cartésien. Sa position à l'étape n est notée (x_n, y_n). Elle part du point $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Elle se déplace de manière aléatoire d'une unité à chaque étape : avec probilité $\frac{1}{4}$ elle peut monter (passer de (x_n, y_n) à $(x_n, y_n + 1)$) descendre (passer de (x_n, y_n) à $(x_n, y_n - 1)$), aller à gauche (passer de (x_n, y_n) à $(x_n - 1, y_n)$) ou aller à droite (passer de (x_n, y_n) à $(x_n + 1, y_n)$). Elle s'arrête quand elle atteint $(0, 2)$.

Sous Maple, représentez la trajectoire de cette personne par une **séquence** L, dont le premier élément est le couple $[0, 0]$ (représentant le point cartésien $(0, 0)$), et le terme d'indice n est la position $[x_n, y_n]$ à l'étape n. Donner L et le nombre d'étapes qu'il a fallu pour atteindre le point $[0, 2]$. Vous devrez utiliser pour cela la commande « rand ».

Exemple de trajectoire : $[0,0],[0,1],[1,1],[1,2],[0,2]$

Exercice 5. (*) Donner les conditions analytiques pour que quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont les affixes des sommets A,B,C,D d'un carré.

Créer une procédure Maple qui prend en entrée quatre points et qui renvoit un booléen « true » si la proposition est vraie, et « false » sinon.

Exercice 6. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = 6x_n + 12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -1$ et $y_0 = 1$. On se propose de calculer les termes généraux de ces deux suites.

1) (*) Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ est telle que la relation de récurrence ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2) (*) Trouver une expression de U_n en fonction de A et U_0.
3) Définir la matrice A, puis déterminer le rang de A. Résoudre l'équation $AX = 0$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On notera e_1 un vecteur directeur de la solution de cette équation.
4) Soit la matrice $B = A - 3I_2$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre $BX = 0$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On notera e_2 un vecteur directeur de la solution de cette équation.
5) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
6) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $D = P^{-1}AP$. Que constatez-vous ?
7) (*) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer D^n
8) A l'aide de la formule de la question précédente, proposer une procédure qui prend en entrée un entier n et les valeurs initiales (x_0, y_0) et qui donne en sortie les valeurs de (x_n, y_n).
9) Donner les valeurs de x_{10}, y_{10} en utilisant la question précédente. Comparer avec les valeurs obtenues si l'on fait le calcul en utilisant la question 2.