Université Paris 7 **Premier semestre 2007-2008**
Licence 1ère année **MK1 - Maple**

Feuille d'exercices n°4

Exercice 1. Prendre deux vecteurs u et v de taille 3 aléatoirement dans Maple. Calculer $w = u \wedge v$ et les produits scalaires (u, w) et (v, w). Que constatez-vous ?

Exercice 2. Calculer l'angle formé entre les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Prendre deux matrices carrées A et B aléatoirement dans Maple. Vérifier que : $A + B = B + A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et (très probablement) $AB \neq BA$.

Exercice 4. Expliquer pourquoi les commandes suivantes fonctionnent ou pas.

```
[> u :=vector([1,0]) ; v :=vector([3,5,2]) ; matadd(u,v) ;
[> A :=randmatrix(2,2) ; B :=randmatrix(3,3) ; matadd(A,B) ;
[> multiply(A,v) ;
[> C :=matrix([[1,2,3],[4,5,6]]) ; multiply(C,B) ; multiply(B,C) ;
```

Exercice 5. Ecrire une procédure qui prend en entrée une matrice M et renvoie la matrice M à laquelle on a ajouté 1 à tous les coefficients de la première colonne.

Exercice 6. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^5. Sans utiliser Maple, en déduire que $M^4 = I$, $M^{-1} = M^3$ et deviner ce que vaut M^{125}. Vérifier ensuite les résultats avec Maple. Calculer également $M^i \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour $i = 1, 2, 3$. Quelle transformation obtient-on ?

Exercice 7.

1) Rappeler la définition d'un famille libre (= linéairement indépendante) de vecteurs. Pour chacune des familles suivantes, déterminer si elles sont libres en écrivant le système (linéaire) correspondant, et en le faisant résoudre par la commande *solve* de Maple.
$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$
2) Rappeler la définition d'une famille génératrice de vecteurs d'un sous-espace vectoriel. Pour chacune des familles suivantes, déterminer si elles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$ en écrivant le système (linéaire) correspondant, et en le faisant résoudre par la commande *solve* de Maple.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par les familles de la question 2 de l'exercice 7,

Exercice 9. On considère les vecteurs $v_1 = [2\ 4\ 5\ 6]$, $v_2 = [1\ 2\ 5\ 3]$, $v_3 = [3\ 1\ -1\ 0]$, $v_4 = [4\ 3\ 4\ 3]$. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4. Le vecteur $w = [4\ 3\ -1\ 3]$ est-il dans ce sous-espace vectoriel ? Si oui, exprimez-le comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Exercice 10. Résoudre les systèmes linéaires $A.X = B$ suivants. Quelle est la nature de l'ensemble des solutions ? Vérifier les résultats en traçant dans $\mathbb{R}^3$ les plans correspondant aux équations (commande *implicitplot3d* de la librairie *plots*).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Résoudre le système linéaire $A.X = B$ suivant à un paramètre m en utilisant le pivot de Gauss. On pourra distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de m. Résoudre ensuite ce système en utilisant *linsolve*. Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.

1) Déterminer une base du noyau et de l'image de chacune des matrices suivantes.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
2) On appelle dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ le nombre de vecteurs d'une de ses bases. Sur les matrices précédentes, calculer la dimension du noyau, la dimension de l'image et la somme de ces dimensions. Que constatez-vous ?

Exercice 13. Matrices magiques.

Soit $n > 1$. Une matrice M à coefficients dans $\mathbb{R}$ de taille $n \times n$ est dite *magique* s'il existe un nombre $s(M)$ tel que les sommes des coefficients sur les lignes, sur les colonnes et sur les deux diagonales soient toutes égales à $s(M)$.

1) Exprimer les conditions précédentes en fonction des $M[i, j]$ (= le coefficient de M à la $i$ème ligne et $j$ème colonne).

2) Ecrire une procédure prenant en entrée une matrice M et vérifiant si elle est magique ou non.

3) On propose un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique de taille n impaire quelconque et dont les coefficients sont les entiers $1, 2, 3, \ldots, n^2$.

   On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés et que l'entier k a été placé en $i$ème ligne et $j$ème colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

   - On pose $I = i - 1$ (sauf si $i = 1$ auquel cas on pose $I = n$) et $J = j + 1$ (sauf si $j = n$ auquel cas on pose $J = 1$).
   - Si aucun nombre n'a encore été placé à la Ième ligne et Jème colonne, on y place l'entier $k + 1$.
   - Si cet emplacement est pris, on pose $I = i + 1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on place $k + 1$ en Ième ligne et Jème colonne.

   Ecrire en Maple la procédure correspondante, qui fournit une matrice magique M_n d'ordre impair n. Donner en particulier M_5.

Exercice 14. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M. Démontrer que les vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base. Calculer $P^{-1}MP$. Pouvez-vous expliquer le résultat obtenu ?