Université Paris 7 | **Économétrie**
Licence 3, 2009-2010 | **Pierre Alquier - Joseph Salmon**

TD N° 10 : Différents exemples de séries avec tendance

Dans ce TD, on examine différents exemples de tendance de séries temporelles. L'Exercice 1 compare le cas où la tendance affecte seulement la moyenne de la série, ou la moyenne et la variance (modèles dits "additif" et "multiplicatif"). L'Exercice 2 s'intéresse au cas où l'on a deux séries qui ont une tendance commune, ce cas peut-être traité de façon générale par la théorie de la cointégration, ici, on n'étudie qu'un cas très simple.

L'Exercice 3 étudie un exemple classique de modèles à retards finis.

Exercice 1. On souhaite ici comparer deux modèles de séries temporelles, observées entre les dates $t = 1$ et $t = T$:

$$y_t = bt + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{1}$$

et

$$z_t = (c + \eta_t)t, \quad \eta_t \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{2}$$

1) Quelle est la loi du vecteur $y = (y_1, ..., y_T)'$? Du vecteur $z = (z_1, ..., z_T)'$?
2) Les hypothèses du cours, **(T0)**, ..., **(T5)** sont elles vérifiées par le Modèle (1) ? Par le Modèle (2) ?
3) Comment estimer le paramètre b ? Et le paramètre c ?

Exercice 2. On suppose que l'on observe entre les dates $t = 1$ et $t = T$ trois séries temporelles x, y et z qui vérifient les équations :

$$\begin{cases} y_t = f(t) + bx_t + \varepsilon_t \\ z_t = f(t) + cx_t + \eta_t \end{cases} \tag{3}$$

où f est une fonction croissante inconnue, b et c sont deux paramètres inconnus et ε_t et η_t sont tous indépendants de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ($\sigma^2 > 0$ inconnu), et indépendants des x_t.

Le jeu est le suivant : à partir des dates $t = T + 1$, $t = T + 2$, ... , on ne pourra plus observer y_t, mais on souhaite être capable de d'estimer cette valeur à partir de x_t et z_t.

1) Un premier économètre, observant que y_t et z_t croissent en même temps le long d'une même tendance, propose simplement l'estimateur $\hat{y}_t = z_t$. Calculer $\mathbb{E}(\hat{y}_t)$, discuter.
2) Un deuxième économètre propose d'introduire une nouvelle série, w, donnée par $w_t = y_t - z_t$. Quelle est la loi de w_t ?
3) En déduire une estimation de w_t, $\hat{w}_t$, en fonction de x_t.
4) On propose alors un autre estimateur, $\tilde{y}_t = z_t + \hat{w}_t$. Calculer $\mathbb{E}(\tilde{y}_t)$, discuter.

Exercice 3. On suppose que l'on a le modèle

$$y_t = a_0 + \sum_{j=0}^{4} b_j x_{t-j} + \varepsilon_j.$$

Une hypothèse classique dans ce contexte est la suivante :

$$b_j = \gamma_0 + \gamma_1 j + \gamma_2 j^2.$$

Comment estimeriez-vous β_0, ..., β_4 en supposant que cette restriction est vraie ?