Université Paris 7 | **Économétrie**
Licence 3, 2009-2010 | **Pierre Alquier - Joseph Salmon**

TD N° 8 : Séries temporelles: modèles statiques et modèles à retards finis

---

Dans ce TD, on étudie des propriétés des modèles statiques et des modèles à retards finis. Dans l'Exercice 1, on voit un exemple de modèle en criminologie, et on étudie les propriétés de l'estimateur des moindres carrés dans ce modèle. Dans l'Exercice 2, on voit un exemple simple de modèle macroéconomique dans lequel les hypothèses classiques ne peuvent pas être satisfaites.

Exercice 1. On suppose que l'on modélise le taux de criminalité crim_t dans Paris lors de l'année t, $t \in \{1980, ..., 2009\}$, en fonction des dépenses consacrées par l'Etat et les collectivités locales :
- en terme de moyens alloués à la Police, depPol_t, en pourcentage du budget total de l'Etat et des collectivités locales ;
- en terme de moyens alloués à la lutte contre le chomage, depCho_t ;
- en terme de moyens alloués aux transports en commun, depTra_t.

Un économètre propose le modèle suivant :

$$\text{crim}_t = b_0 + b_1 \text{depPol}_t + b_2 \text{depCho}_t + b_3 \text{depTra}_t + \varepsilon_t, \qquad (1)$$

et un autre économètre propose le modèle :

$$\begin{aligned} \text{crim}_t = b_0 + b_1 \text{depPol}_t + b_1' \text{depPol}_{t-1} + b_2 \text{depCho}_t + b_2' \text{depCho}_{t-1} \\ + b_3 \text{depTra}_t + b_3' \text{depTra}_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned} \qquad (2)$$

dans les deux cas, avec les hypothèses usuelles du cours :
- **(T0)** les ε_t sont indépendants de tous les depPol_t, depCho_t et depTra_t ;
- **(T1)** $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$;
- **(T2)** les ε_i sont indépendants les uns des autres ;
- **(T3)** il existe un $\sigma > 0$ tel que pour tout i, $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$;
- **(T4)** les ε_i sont gaussiens, i.e. $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) A quelle famille de modèle appartient le modèle (1) ? Et le modèle (2) ?
2) On va maintenant considérer le modèle (2) comme étant le plus pertinent, discuter ce choix.
3) Ecrire le modèle (2) sous forme matricielle.
4) Rappeler la définition de l'estimateur des moindres carrés. Quelle hypothèse faut-il rajouter ici pour que cette définition ait un sens ?
5) Montrer que l'estimateur des moindres carrés $\hat{b}$ est sans biais dans ce contexte.
6) Donner une expression de $\text{Var}(\hat{b})$.
7) On obtient le résultat suivant (ici, il ne s'agit pas de données réelles ; les écarts-types sont donnés en indice) :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{crim}}_t = 15.1_{(2.1)} + 0.1_{(0.2)} \text{depPol}_t - 2.3_{(1.1)} b_1' \text{depPol}_{t-1} \\ - 0.2_{(0.2)} \text{depCho}_t - 5.8_{(1.3)} \text{depCho}_{t-1} \\ + 0.1_{(1.5)} \text{depTra}_t - 0.5_{(1.1)} \text{depTra}_{t-1}. \end{aligned}$$

Quels coefficients sont significativement différents de 0 d'après le test de Student ? Commenter le signe de ces coefficients. Peut-on décider au vu des résultats quelles variables, parmi depPol_t, depPol_{t-1}, depCho_t, depCho_{t-1}, depTra_t et depTra_{t-1}, il faut conserver dans le modèle ? Si oui, lesquelles ? Sinon, décrire rapidement une procédure qui permettrait de choisir.

Exercice 2. (D'après Wooldridge) On suppose que la croissance du PIB à la date t, PIB_t, est liée au taux d'intérêt int_t de la façon suivante :

$$\text{PIB}_t = b_0 + b_1 \text{int}_t + b_2 \text{int}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

où on suppose simplement que pour tout t, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \text{int}_t) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \text{int}_{t-1}) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \text{int}_{t-2}) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \text{int}_{t-3}) = ... = 0$. De plus, on suppose que la banque centrale détermine le taux d'intérêt d'après l'équation suivante :

$$\text{int}_t = \gamma_0 + \gamma_1(\text{PIB}_{t-1} - 3) + u_t \tag{4}$$

où $\gamma_1 > 0$, et pour tout t, $\text{Cov}(u_t, \text{int}_t) = \text{Cov}(u_t, \text{int}_{t-1}) = \text{Cov}(u_t, \text{int}_{t-2}) = \text{Cov}(u_t, \text{int}_{t-3}) = ... = 0$ et $\text{Cov}(u_t, \varepsilon_t) = \text{Cov}(u_t, \varepsilon_{t-1}) = \text{Cov}(u_t, \varepsilon_{t-2}) = \text{Cov}(u_t, \varepsilon_{t-3}) = ... = 0$.

1) Discuter le modèle (3). Quel est le signe attendu des coefficients b_1 et b_2 ?
2) Discuter la politique de la banque centrale donnée par l'Equation (4). Quel est le sens de $\gamma_1 > 0$? Quel est manifestement l'objectif de la banque centrale d'après cette équation ?
3) Calculer $\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \text{int}_t)$.
4) Conclure : quelle hypothèse (parmi **(T0)**, **(T1)**, ..., **(T4)**) est ici forcément violée pour le modèle (3) ? Quelle en est la conséquence ?