

# Fourier et représentations temps/fréquences

J.Salmon (reprise d'un cours de E. Le Pennec)

Février 2009

## 1 Fourier : série, transformée et FFT

### 1.1 Série de Fourier, Transformée de Fourier

Soit  $f \in L^2([-T/2, T/2])$ , on définit ses coefficients de Fourier par

$$\hat{f}[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi kt/T} dt$$

et sa série de Fourier par

$$Sf = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}[k] e^{i2\pi kt/T} .$$

L'un des résultats centraux de la théorie des séries de Fourier est que la famille  $\{\frac{1}{T} e^{i2\pi kt/T}\}$  est une base hilbertienne de  $L^2([-T/2, T/2])$  et donc qu'au sens de la convergence  $L^2$  :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}[k] e^{i2\pi kt/T} .$$

La transformée de Fourier définie sur  $L^2(\mathbb{R})$  peut être vue comme un passage à la limite sur  $T$  des séries de Fourier. L'analogie des coefficients de Fourier est la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

où  $\omega$  est l'analogie de  $2\pi k/T$ .

On rappelle quelques formules utiles dans la suite autour de la transformée de Fourier :

- $\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$  si  $f$  dérivable, de limite nulle à l'infini et  $f'$  intégrable
- $\widehat{f(\cdot + \tau)}(\omega) = e^{i\omega\tau} \hat{f}(\omega)$  (translation  $\longleftrightarrow$  multiplication par une exponentielle)
- $\widehat{f \star g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$  (convolution  $\longleftrightarrow$  multiplication)

L'égalité de  $f$  et de sa série de Fourier se transforme en une formule de reconstruction de  $f$  à partir de  $\hat{f}$  au sens de  $L^2$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

Cette analogie est plus que formelle et on peut montrer à l'aide de la théorie des distributions qu'il s'agit en fait de la même chose! Celle-ci permet de définir la transformée de Fourier d'une fonction périodique et l'on obtient une distribution qui vaut 0 sauf aux points  $2\pi k/T$  où l'on trouve un dirac dont le poids est exactement le coefficients de Fourier  $c_k$ ... Réciproquement, la transformée de Fourier d'une telle distribution, dite échantillonnée à un pas  $2\pi/T$ , donne une fonction  $T$  périodique.

## 1.2 Transformée de Fourier Discrète

En pratique, on a jamais accès à une fonction  $f$  qu'elle soit de  $L^2(\mathbb{R})$  ou de  $L^2([-T/2, T/2])$  mais seulement à un nombre **fini** d'échantillons  $f[k] = f(k\delta)$  où  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et  $\delta$  est un pas d'échantillonnage.

Comment définir une transformée de Fourier d'un tel signal? Une idée simple est de voir  $f[k]$  comme les échantillons d'une fonction  $N\delta$ -périodique, et de définir des coefficients de Fourier à l'aide d'une somme de Riemann :

$$\hat{f}[k] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f[l] e^{-2i\pi kl\delta/T} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f[l] e^{-2i\pi kl/N} .$$

On vérifie aisément que  $\hat{f}[k]$  est périodique de période  $N$  et que cette décomposition correspond en fait à la décomposition dans la famille orthogonale définie par

$$\{e^{i2\pi kl/N}\}_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} .$$

Ceci donne alors immédiatement une formule de reconstruction :

$$f[k] = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{i2\pi kl/N} .$$

On démontre cette formule par le calcul direct :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}[j] e^{2i\pi jl/N} e^{-2i\pi kl/N} \\ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left( f(k) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \hat{f}[j] e^{2i\pi jl/N} e^{-2i\pi kl/N} \right) \\ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= f[k] + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \hat{f}[j] \left( \sum_{l=0}^{N-1} e^{2i\pi(j-k)l/N} \right) \\ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= f[k] \end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en appliquant l'égalité  $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \sum_{j=0}^{N-1} x^j = \frac{1-x^N}{1-x}$  pour  $x = e^{2i\pi(j-k)l/N}$  (avec  $j \neq k$ ).

△

Lorsque l'on calcule numériquement une transformée de Fourier, il faut bien faire attention au fait que c'est en fait la transformée de Fourier Discrète de la périodisation d'une restriction de  $f$  échantillonnée qui est calculée!

## 1.3 Transformée Rapide de Fourier

La FFT (Fast Fourier Transform) est un algorithme rapide permettant de calculer la Transformée de Fourier Discrète de  $f$ , c'est à dire les  $N$  coefficients  $\hat{f}[k]$  à partir des  $f[k]$  observés. L'algorithme en question requiert  $O(N \log N)$  multiplications au lieu des  $O(N^2)$  de l'algorithme naïf.

Pour l'algorithme naïf on doit calculer  $N$  coefficients, et chaque calcul nécessite  $N$  multiplications (et  $N$  sommes) si l'on utilise la définition de la transformée discrète.

Par une stratégie "**diviser pour mieux régner**" on va illustrer comment on peut diminuer ce coût. Supposons que  $N$  est paire :  $N = 2M$ . Notons  $g$  et  $h$  les deux fonctions  $M$  périodiques définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (g[1], \dots, g[M]) &= (f[0], f[2], \dots, f[2M-2]) \\ (h[1], \dots, h[M]) &= (f[1], f[3], \dots, f[2M-1]) \end{aligned}$$

Remarquons qu' alors :  $\hat{g}[k + M] = \hat{g}[k]$  et  $h[k + M] = \hat{h}[k]$ .

Écrivons  $\omega_M = e^{2i\pi/M}$  (ce qui donne  $\omega_M^M = 1$ ) pour simplifier les notations. On calcul la transformée en  $k_0$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{f}[k_0] &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{2M-1} f[k] \omega_{2M}^{kk_0} \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k] \omega_{2M}^{2kk_0} + \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k+1] \omega_{2M}^{(2k+1)k_0} \quad (\text{termes paires / impaires}) \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k] \omega_M^{kk_0} + \frac{\omega_{2M}^{k_0}}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k+1] \omega_{2M}^{(2k)k_0}\end{aligned}$$

Ce qui donne selon la valeur de  $k_0$  la formule

$$\hat{f}[k_0] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \hat{g}[k_0] + \omega_{2M}^{k_0} \hat{h}[k_0] \right) & \text{si } 0 \leq k_0 \leq M-1 \\ \frac{1}{2} \left( \hat{g}[k_0 - M] + \omega_{2M}^{k_0} \hat{h}[k_0 - M] \right) & \text{si } M \leq k_0 \leq 2M-1 \end{cases}$$

Notons  $C(n)$  le nombre de multiplications nécessaires pour calculer une transformée d'un signal ayant  $n$  échantillons. On observe alors la récurrence :  $C(2n) = 2 * C(n-1) + 3n - 2$  : on a besoin de calculer la transformée discrète de  $g$  et  $h$  (coût :  $2C(n)$ ), pour chacun des  $n$  indices, on a une multiplication par le terme  $\frac{1}{2}$  et une multiplication par le terme  $\omega_{2M}^{k_0}$  (coût :  $2n$ ). Enfin le calcul des  $n$  termes  $\omega_n^0, \dots, \omega_n^{n-1}$  s'obtient en calculant  $\omega_n$ , puis par multiplication successive par ce terme on obtient les  $n-1$  autres (coût :  $n-2$ ).

Pour les puissances de 2 la récurrence s'écrit  $C(2^n) = 2C(2^{n-1}) + O(n)$ . On en déduit que  $C(2^n) = O(n2^n)$ . C'est l'ordre de grandeur attendu. On généralise en complétant le signal par des zéros pour arriver à la puissance de 2 immédiatement supérieure. L'ordre de grandeur reste en  $O(N \log(N))$ .

Pour information si  $n = 10^6$ ,  $n^2 = 10^{12}$  alors que  $n \log(n) = 1.381 \times 10^6$

## 2 Transformée de Fourier à Fenêtre

### 2.1 Atomes temps-fréquence

Soit  $f$  un signal de  $L^2$  que l'on souhaite analyser, et soit  $\phi$  une fonction de  $L^2$  normalisée à 1 :

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt = 1 .$$

Considérons le produit scalaire dans  $L^2$  :

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi^*(t) dt .$$

Si la fonction  $\phi$  est localisée autour d'une position  $u$ , alors  $\langle f, \phi \rangle$  ne dépend que des valeurs prises par  $f(t)$  au voisinage de  $t = u$ . De même, dans le domaine fréquentiel, par la formule de Parseval,

$$\langle f, \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}^*(\omega) d\omega .$$

Si la fonction  $\hat{\phi}$  est localisée autour d'une fréquence  $\xi$ , alors  $\langle f, \phi \rangle$  ne dépend que des valeurs prises par  $\hat{f}(\omega)$  au voisinage de  $\omega = \xi$ .

Afin de déterminer si, autour d'un instant  $u$  donné, un signal  $f$  a de l'énergie à la fréquence  $\xi$ , il suffit de calculer le produit scalaire de  $f$  avec une fonction  $\phi$  qui soit concentrée à la fois en temps autour de  $u$  et en fréquence autour de  $\xi$  : c'est ce qu'on appelle un *atome temps-fréquence*.

Précisons ce qu'on entend par la concentration d'une fonction en temps et en fréquence. On appelle  $u$  la position moyenne de  $\phi$ , définie par :

$$u = \int t |\phi(t)|^2 dt .$$

La translation d'une fonction modifie sa position moyenne : si  $\phi(t)$  a pour position moyenne 0, alors  $\phi(t-u)$  a pour position moyenne  $u$ . La concentration temporelle de  $\phi$  autour de  $u$  est mesurée par l'inverse de la variance temporelle  $\sigma_t^2$  :

$$\sigma_t^2 = \int (t-u)^2 |\phi(t)|^2 dt . \quad (1)$$

Plus  $\phi$  est concentrée autour de  $u$ , plus la variance temporelle  $\sigma_t$  est petite. La translation d'une fonction ne modifie pas sa concentration.

De même, on définit la fréquence moyenne de  $\phi$  par :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int \omega |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega .$$

La modulation d'une fonction modifie sa fréquence moyenne : si  $\phi(t)$  a pour fréquence moyenne 0, alors  $\exp(i\xi t)\phi(t)$  a pour fréquence moyenne  $\xi$ . La concentration fréquentielle de  $\phi$  autour de  $\xi$  est mesurée par l'inverse de sa variance fréquentielle  $\sigma_\omega^2$  :

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \xi)^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega . \quad (2)$$

La modulation d'une fonction par  $\exp(i\xi t)$  ne modifie pas sa concentration fréquentielle.

Le théorème suivant montre qu'il y a une limite à la concentration temps-fréquence conjointe. Plus une fonction est concentrée en temps, moins elle est concentrée en fréquence. Dans le cadre de la physique quantique, le résultat a été démontré par Weyl, pour des fonctions de probabilité de présence. On obtient alors le *principe d'incertitude* : lorsqu'on augmente la certitude sur la position d'une particule on augmente l'incertitude sur sa quantité de mouvement.

**Théorème 1** (Principe d'incertitude). Soit  $\phi \in \mathcal{C}^1$  telle que  $\|\phi\| = 1$ ,  $\phi$ ,  $t\phi(t)$  et  $\phi'(t)$  soient dans  $L^2$  et  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t}\phi(t) = 0$ . La variance spatiale et la variance temporelle de  $\phi$  satisfont

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} .$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe  $(u, \xi, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$  tels que

$$\phi(t) = a \exp [i\xi t - b(t-u)^2] .$$

*Démonstration.* Si les positions moyennes de  $\phi$  en temps et en fréquence sont  $u$  et  $\xi$ , alors les positions moyennes de  $\exp(-i\xi t)\phi(t+u)$  en temps et en fréquence sont toutes deux nulles. Il suffit donc de montrer le théorème pour  $u = \xi = 0$ . Remarquons que

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int |t\phi(t)|^2 dt \int |\omega \hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega .$$

Comme  $i\omega \hat{\phi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\phi'(t)$ , l'identité de Plancherel appliquée à  $i\omega \hat{\phi}(\omega)$  donne

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \int |t\phi(t)|^2 dt \int |\phi'(t)|^2 dt$$

Par l'inégalité de Schwarz, le fait que  $|z|^2 \geq \operatorname{Re}(z)^2$ , et que  $(|\phi|^2)' = (\phi\phi^*)' = \phi'\phi^* + \phi(\phi^*)'$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \left| \int t \phi'(t) \phi^*(t) dt \right|^2 \\ &\geq \left| \int \frac{t}{2} (\phi'(t) \phi^*(t) + \phi'^*(t) \phi(t)) dt \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left| \int t (|\phi(t)|^2)' dt \right|^2 . \end{aligned}$$

Comme par hypothèse  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t} \phi(t) = 0$ , on obtient après intégration par parties

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \left[ \int |\phi(t)|^2 dt \right]^2 \geq \frac{\|\phi\|^4}{4}.$$

Pour atteindre l'égalité, il faut que l'inégalité de Schwarz soit elle-même une égalité. Cela implique qu'il existe  $b \in \mathbb{C}$  tel que

$$\phi'(t) = -2bt\phi(t).$$

Il existe donc  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $\phi(t) = a \exp(-bt^2)$ . Les inégalités de la suite de la preuve sont aussi des égalités, ce qui fait que le minorant est effectivement atteint. ■

Le Théorème 1 montre que les gaussiennes modulées

$$\phi(t) = a \exp [i\xi t - b(t - u)^2] \quad (3)$$

sont des fonctions qui ont une concentration temps-fréquence maximale : elles s'appellent les fonctions de Gabor.

Le principe d'incertitude impose ainsi une limite supérieure à la concentration temps-fréquence.

## 2.2 Transformée de Fourier à fenêtre

On appelle atome de Fourier à fenêtre une fonction  $g_{u,\xi}$  construite en translatant de  $u$  et en modulant par  $e^{i\xi t}$  une fonction  $g(t)$  réelle et paire :

$$g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u). \quad (4)$$

Les fonctions de Gabor (3) sont un exemple d'atomes de Fourier à fenêtre, construits à partir d'une fonction gaussienne. La gaussienne  $g(t)$  doit être normalisée de sorte que  $\|g\| = \|g_{u,\xi}\| = 1$ , c'est-à-dire

$$g(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2}\right).$$

La transformée de Fourier à fenêtre (ou encore à fenêtre *glissante*) de  $f \in L^2$  est définie par produit scalaire avec  $g_{u,\xi}$  :

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt. \quad (5)$$

On peut voir la fonction  $g(t - u)$  comme une "fenêtre" qui permet de localiser  $f$  autour de  $u$  avant de prendre sa transformée de Fourier.

La transformée de Fourier à fenêtre génère une fonction à deux variables réelles,  $Sf(u, \xi)$ , à partir d'une fonction  $f(t)$  d'une seule variable : il y a une redondance d'information. Le théorème suivant, dû à Gabor, montre qu'il est possible de reconstruire  $f$  à partir de sa transformée de Fourier à fenêtre.

**Théorème 2** (Formule d'inversion). Si  $f \in L^2$  alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t - u) e^{i\xi t} d\xi du. \quad (6)$$

*Démonstration.* La transformée de Fourier en  $u$  de  $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$  se calcule en remarquant que

$$\begin{aligned} Sf(u, \xi) &= \exp(-iu\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) \exp[i\xi(u - t)] dt \\ &= \exp(-iu\xi) f \star g_\xi(u), \end{aligned}$$

avec  $g_\xi(t) = g(t) \exp(i\xi t)$ , car  $g(t) = g(-t)$ . Sa transformée de Fourier vaut donc

$$\hat{f}_\xi(\omega) = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}_\xi(\omega + \xi) = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega).$$

La transformée de Fourier de  $g(t - u)$  selon la variable  $u$  vaut  $\hat{g}(\omega)e^{-it\omega}$ . On peut maintenant appliquer la formule de Parseval par rapport à la variable  $u$  du membre de droite de (6). On a donc comme  $g$  est réelle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(u)g(t - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(u)g^*(t - u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{\xi}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} \exp[-it(\omega)] d\omega$$

Ce qui donne en multipliant par  $\exp(i\xi t)$  et en intégrant par rapport à la variable  $\xi$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) du d\xi \right) = \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp[it(\omega + \xi)] d\omega \right) d\xi . \end{aligned}$$

Si  $\hat{f} \in L^1$ , on peut appliquer le théorème de Fubini pour changer l'ordre d'intégration. Le théorème de transformée de Fourier inverse montre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\omega + \xi)] d\xi = f(t).$$

Comme  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 d\omega = 1$ , on en déduit (6). Pour  $\hat{f} \notin L^1$ , la formule se démontre par un argument de densité (notamment les fonction  $C^\infty$  à support compact sont denses dans  $L^2$ ) ■

On définit une densité d'énergie appelée *spectrogramme* et notée  $P_S$  :

$$P_S f(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt \right|^2 . \quad (7)$$

Le théorème suivant justifie l'interprétation du spectrogramme comme une densité d'énergie, car son intégrale dans le plan temps-fréquence est égale à l'énergie du signal.

**Théorème 3** (Conservation de l'énergie). Si  $f \in L^2$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du. \quad (8)$$

*Démonstration.* Comme la transformée de Fourier selon  $u$  de  $Sf(u, \xi)$  est  $\hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega)$ , l'application de la formule de Plancherel au membre de droite de (8) donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega)|^2 d\omega d\xi.$$

Le théorème de Fubini s'applique, et la formule de Plancherel montre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega + \xi)|^2 d\xi = \|f\|^2,$$

ce qui implique (8). ■

Le spectrogramme mesure l'énergie de  $f$  dans le voisinage temps-fréquence de  $(u, \xi)$  défini par la variance temporelle et la variance fréquentielle de  $g$  (formules (1) et (2)). Ainsi, la localisation précise de l'énergie de  $f$  dans le plan temps-fréquence, autrement dit la *résolution* de la transformée de Fourier à fenêtre dépend de la concentration temps-fréquence de  $g$ . Ceci est manifeste dans les deux exemples suivants.

**Exemple 1.** Une sinusoïde  $f(t) = \exp(i\xi_0 t)$  n'est pas dans  $L^2$  mais on peut donner un sens à sa transformée de Fourier à fenêtre (5). On obtient

$$Sf(u, \xi) = \hat{g}(\xi - \xi_0) \exp[-iu(\xi - \xi_0)].$$

Le spectrogramme  $P_S f(u, \xi) = |\hat{g}(\xi - \xi_0)|^2$  est une fonction de  $\xi$  seulement, dont la concentration autour de  $\xi_0$  est égale à celle de  $\hat{g}$  autour de 0.

**Exemple 2.** De même, on peut donner un sens à la transformée de Fourier à fenêtre d'un Dirac  $f(t) = \delta(t - u_0)$ , qui vaut

$$Sf(u, \xi) = g(u_0 - u) \exp(-i\xi u_0).$$

Le spectrogramme  $P_S f(u, \xi) = |g(u_0 - u)|^2$  est une fonction de  $u$  seulement, dont la concentration autour de  $u_0$  est égale à celle de  $g$  autour de 0.

La transformée de Fourier classique a une résolution fréquentielle infinie, car la transformée de Fourier d'une sinusoïde est un Dirac, mais elle n'a en revanche aucune résolution temporelle. Les exemples ci-dessus montrent que la résolution temps-fréquence de la transformée de Fourier à fenêtre est dictée par la variance temporelle et fréquentielle de la fenêtre  $g$  utilisée. La transformée de Fourier à fenêtre offre une meilleure résolution temporelle que la transformée de Fourier classique, au prix d'une moins bonne résolution fréquentielle.

**Exemple 3.** Un chirp linéaire  $f(t) = \exp(iat^2)$  a une "fréquence instantanée" qui croît linéairement avec le temps. Pour une fenêtre gaussienne  $g(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp(-t^2/2\sigma^2)$ , on peut vérifier que le spectrogramme de  $f$  est

$$P_S f(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2 = \left( \frac{4\pi\sigma^2}{1 + 4a^2\sigma^4} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{\sigma^2(\xi - 2au)^2}{1 + 4a^2\sigma^4} \right).$$

A un instant donné  $u$ ,  $P_S f(u, \xi)$  est une gaussienne qui atteint son maximum à la fréquence  $\xi(u) = 2au$ .

L'inconvénient de la transformée de Fourier à fenêtre est sa résolution uniforme en temps-fréquence, spécifiée par la fenêtre  $g$ . Ceci ne convient pas à l'analyse de signaux dont les variations peuvent s'opérer sur des durées très variables.

#### Références :

- Analyse réelle et complexe : cours et exercices (W.Rudin)
- "Une exploration des signaux en ondelettes", (S. Mallat)
- "Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes" (C.Gasquet et P.Witomski)

Le premier livre rappelle les éléments de base à connaître sur la théorie de l'intégration et de Fourier. Les deux autres sont d'un niveau plus élevé, l'un plus appliqué (Mallat) l'autre plus théorique.

Pour la suite quelques sites sur la transformée de Fourier discrète (DFT) et la transformée de Fourier Rapide (FFT)

- <http://www.fftw.org/links.html>
- <http://www.tele.ucl.ac.be/EDU/ELEC2900/>
- <http://texas.math.ttu.edu/~gilliam/ttu/dft.pdf>
- Cambridge

## Pratique...

Vous trouverez les fichiers sonores `clarinet.wav` et `sequence.wav` que vous devez placer dans le répertoire de travail, à l'adresse <http://people.math.jussieu.fr/~salmon> dans la partie enseignement.

### ANALYSE DE TIMBRES

On propose de synthétiser les timbres de différents instruments, qui jouent une note unique, de façon entretenue : ici, il n'y a pas de phénomène transitoire et le cadre de la transformée de Fourier classique est a priori bien adapté. Pour cette partie, on créera un script SCILAB, qu'on appellera `timbre` par exemple.

### SYNTHÈSE D'UN SON DE CLARINETTE

Analysez le spectre de la clarinette à partir du son `clarinet.wav`. On peut le lire dans SCILAB avec la commande `wavread`

```
[y,Fs,bits]=wavread(wavfile) ;
```

La variable `y` contient alors le signal temporel, `Fs` est l'inverse du pas d'échantillonnage, et `bits` est le nombre de bits sur lesquels est stocké chaque échantillon (8 ou 16).

Prendre comme fréquence fondamentale  $\omega_0 = 2\pi * 440$  et créer un signal dont le spectre ressemble à celui de la clarinette. On choisira comme durée de signal  $D = 2$  secondes et comme fréquence d'échantillonnage  $2\pi * 40000$ .

On peut sauver un son sous SCILAB sous le format `.wav` avec la commande `wavwrite` :

```
wavwrite(y,Fs,wavfile)
```

Le second argument `Fs` devra être égal à  $1/T$  où  $T$  est le pas d'échantillonnage, et le dernier argument `wavfile` est un nom de fichier entre guillemets, par exemple `'simuclarinette.wav'`.

Comparer les sons de clarinette simulée et enregistrée en écoutant les fichiers `.wav` correspondants.

Modifier le signal `s` pour que son spectre ressemble davantage au spectre du son enregistré. Ecouter le résultat.

### SYNTHÈSE D'UN SON DE CLOCHE

Un son de cloche est composé de *partiels*, i.e. des composantes sinusoïdales dont les fréquences ne sont pas multiples d'une fréquence fondamentale. On pourra créer le son

$$s(t) = \sin(\omega_0 t) + \sin(1.5\omega_0 t) + \sin(2.2\omega_0 t) + \sin(3.1\omega_0 t) + \sin(3.3\omega_0 t)$$

puis l'écouter.

### TRANSFORMÉE DE FOURIER À FENÊTRE

On s'intéresse à un signal mesuré entre 0 et  $D$  secondes, dont on observe dans la pratique qu'une version discrétisée avec  $N$  échantillons. On va calculer numériquement son spectrogramme :

$$P_S f(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-u) e^{-i\xi t} dt \right|^2 .$$

La variable temporelle  $u$  prend ses valeurs sur  $[0, D]$ . La variable de fréquence  $\xi$  prend elle ses valeurs dans l'intervalle  $[-\pi/T, \pi/T]$ , où  $T$  est le pas d'échantillonnage. A priori,  $u$  et  $\xi$  pourraient être discrétisées avec  $N$  échantillons chacun, mais on obtiendrait une matrice avec  $N^2$  éléments, qui serait coûteuse à stocker pour  $N$  grand. On choisit de discrétiser  $u$  avec  $M_u = \sqrt{N}$  valeurs



entre 0 et 1, et  $\xi$  avec  $M_\xi = 2\sqrt{N} + 1$  valeurs entre  $-\pi/T$  et  $\pi/T$ . Ceci donne une matrice avec  $\sqrt{N} \times (2\sqrt{N} + 1)$  éléments. On analyse des fonctions réelles, donc le spectrogramme est pair en la variable  $\xi$ . Ceci nous permet de se limiter aux fréquences positives, et de réduire la taille de la matrice à  $\sqrt{N} \times (\sqrt{N} + 1)$ .

## Fonction TFF

Dans un script (`tempsfrequence` par exemple), créer une fonction TFF (Transformée de Fourier à Fenêtre) avec pour entrée un signal `sig` et en sortie un spectrogramme `spect`. Pour ce faire, taper

```
function spect = TFF(sig);
```

et écrire le corps de la fonction entre la ligne ci-dessus, et la commande

```
endfunction
```

Voici les étapes principales à respecter pour créer cette fonction :

1. Définir les dimensions du spectrogramme :  $M = \text{sqrt}(N)$  où on aura défini  $N$  comme étant la longueur du signal (commande `length`).
2. On initialise alors le spectrogramme par  
`spect = zeros(M,M+1)` ;
3. On définit une fenêtre de longueur  $2M + 1$  par  
`t = linspace(-.5, .5, 2*M+1)` ;  
`win = (cos(%pi.*t).^2)` ;
4. Pour ne pas avoir de problèmes de bord, on prolonge le signal à droite et à gauche par des zéros. On choisit de définir le signal comme un vecteur ligne, et on le prolonge grâce à  
`f = [zeros(1,N), sig, zeros(1,N)]` ;
5. Pour discrétiser la transformée de Fourier à fenêtre, il faut faire une boucle sur la variable  $u$  et évaluer la FFT du signal multiplié par la fenêtre centrée en  $u$ .

```
for l = 1:M,
    intervalle = N + (l-1)*M+(-M:M) ;
    locf = f(intervalle).*win ;
    localspec = fft(locf,-1) ;
    spect(l, :) = abs(localspec(M+1:-1:1)).^2 ;
end
```

On se limite aux fréquences positives en ne conservant que les  $M+1$  premières valeurs de `localspec`. Le renversement de l'ordre  $M+1 : -1 : 1$  au lieu de  $1 : M+1$  permet d'avoir une représentation naturelle du plan temps-fréquence lors de l'affichage.

## VALIDATION

On pourra taper les commandes suivantes dans le script `tempsfrequence`, à la suite de la commande `endfunction`. Tester que cette fonction TFF donne le résultat attendu pour :

1. Un signal impulsionnel  
`f = zeros(1,N)` ;  
`f(p) = 1` ;  
où  $p$  est un entier choisi entre 1 et  $N$ .
2. Un signal sinusoïdal  
`t = linspace(0,D,N)` ;  
`f = sin(om*t)` ;  
où  $D$  est la durée du signal, et le pas d'échantillonnage est donc  $D/N$ .

Ne pas oublier de choisir une taille de signal qui soit le carré d'un nombre entier, par exemple  $N = 2^{14} = 16384$ . Pour afficher le spectrogramme dans la fenêtre numéro 1, utiliser la commande

```
xbasc(1) ;
xset('window',1) ;
see(specgm) ;
```

on crée la fonction `see` de la manière suivante :

```
function see(m) ;
    g = (1 :256)./256 ;
    g = g'*ones(1,3) ;
    xset("colormap",g) ;
    m = 256.*(m-min(m))./(max(m)-min(m)) ;
    Matplot(m',frameflag = 4)
endfunction
```

## FRÉQUENCE INSTANTANÉE

Créer les fonctions suivantes et observer leur spectrogramme :

1. Un chirp linéaire dont la fréquence instantanée augmente de 200 Hz à 440 Hz en 5 secondes.
2. Une somme de deux chirps linéaires dont l'un augmente de 200 à 440 Hz et l'autre diminue de 500 à 100 Hz en 4 secondes.
3. Un chirp linéaire dont la fréquence instantanée augmente de 0 Hz à une fréquence supérieure à  $\text{freqech}/2$ , où  $\text{freqech}$  est la fréquence d'échantillonnage. Expliquer pourquoi la fréquence instantanée représentée sur le spectrogramme croît d'abord, et ensuite décroît.
4. Une fonction dont la fréquence oscille autour de 440Hz.

On écouter les sons représentés par ces signaux.

## SÉQUENCE MUSICALE

Écouter la séquence `sequence.wav` et la faire lire par SCILAB. Ne conserver que les  $N$  premières valeurs de la séquence, avec  $N$  carré d'un nombre entier le plus grand possible. Calculer le spectrogramme et l'afficher. Pour jouer sur le contraste et mieux voir les différentes composantes spectrales, on peut afficher

```
see(specgm.^r) ;
```

où  $r < 1$ .