Rappels :

- La mutiplication matricielle se note `%*%`. La transposée d'une matrice est calculée par la fonction `t()`.
- La fonction **crossprod** transpose son premier argument et le multiplie par le second : **crossprod**(`A,B`) est équivalent à `t(A) %*% B`. Si on a un seul argument `crossprod(A) == t(A)%*%A`. Le produit extérieur est noté `%o%` .
- Le déterminant est calculé par `det()`.
- Pour ajouter une colonne à un matrice **cbind**().
- Pour ajouter une ligne à une matrice **rbind**().
- La fonction **diag**() permet de construire des matrices diagonales.
- **solve**(`A`) inverse la matrice `A`. **chol**(`A`) retourne la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique `A`.

Manipulations

Les exercices renvoient aux feuilles de TD 5 et 6 du cours MA3

Exercice 1 Feuille 5

On part de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

qui représente un endomorphisme u dans la base canonique, et des vecteurs

$$f_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} f_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Comment vérifier en `R` que f_1, f_2, f_3 forment une base (une famille libre) ?
2. Calculer en `R` la matrice P de passage de la base canonique vers la base f_1, f_2, f_3 et calculer son inverse.
3. Calculer en `R` la matrice de l'endomorphisme u dans la base f_1, f_2, f_3.
4. Calculer directement $u(f_1), u(f_2), u(f_3)$.

Exercice 1 Feuille 6

On pose

$$4A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer en `R` les vecteurs propres et valeurs propres de A (fonctions **eigen** et **svd**).
2. Ecrire une fonction qui calcule rapidement A^n (en prenant A et n en arguments)
3. Déterminer les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que la suite $(A^n x)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}^3$.

Projections orthogonales

Dans cet exercice, on veut construire la matrice de la projection P sur le sous-espace engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ de $\mathbb{R}^p$. On note Z la matrice dont les colonne sont les vecteurs $\vec{u}_i$. On note E le sous-espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ et $E^{\perp}$ le sous-epace orthogonal à E.

1. Vérifier que tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique en une somme $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ avec $\vec{w}_1 \in E$ et $\vec{w}_2 \in E^{\perp}$.
2. On note P_E la fonction qui a $\vec{w}$ fait correspondre $\vec{w}_1$ vérifier que cette fonction est bien linéaire. Quel est son noyau ? Quelle est son image ?

3. Soit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ une base orthornormée du sous-espace engendré par $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$. Vérifiez que
$$P_E = \sum_{i=1}^{r} \vec{a}_i \vec{a}_i^T .$$
Attention : $\vec{a}_i \vec{a}_i^T$ désigne l'endomorphisme qui à $\vec{v}$ fait correspondre $(\vec{v} \cdot \vec{a}_i)\vec{a}_i$ où $(\vec{v} \cdot \vec{a}_i)$ est le produit scalaire de $\vec{v}$et $\vec{a}_i$ ($\vec{a}_i^T \vec{v}$ est une autre manière d'écrire le produit scalaire).
4. Calculer P_E^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Régression simple, orthogonalisation de Gram-Schmidt

Charger encore les données `whiteside` de la librairie `MASS`. **library** (`MASS`);**data**(`whiteside`)

Rappels : le procédé d'orthogonolisation de Gram-Schmidt consiste à construire une famille orthonormée $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ à partir d'une famille de vecteurs $\mathcal{Q} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ de $\mathbb{R}^p$. avec la garantie que le sous-espace engendré par $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ est identique au sous-espace engendré par $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$.

La procédure est initialisée par $\mathcal{L} \leftarrow ((1/\|\vec{u}_1\|)\vec{u}_1)$. et $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \setminus \{\vec{u}_1\}$.

A l'étape i, $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{Q} \setminus \{\vec{u}_i\}$. Si $\vec{u}_i$ appartient au sous-espace engéndré par les vecteurs de la collection courrante $\mathcal{L}$, on passe à l'étape suivante. Sinon, on note $\vec{w}_i$ la projection orthogonale de $\vec{u}_i$ sur le sous-espace engendré par les vecteurs de $\mathcal{L}$. On met à jour $\mathcal{L}$:
$$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{(1/\|\vec{u}_i - \vec{w}\|)(\vec{u}_i - \vec{w})\} .$$

1. Vérifier qu'à chaque étape, $\mathcal{L}$ est formée par une famille orthonormée.
2. Vérifier qu'à chaque étape, $\mathcal{L}$ engendre le sous-espace engendré par les vecteurs extraits de $\mathcal{Q}$.
3. Conclusion

La régression linéaire, ou plutôt la technique des moindres carrés peut-être analysée comme une mise en oeuvre du procédé de Gram-Schmidt. On note $\vec{1}$ un vecteur colonne formé de n coordonnées égales à 1, $\vec{x}$ le vecteur colonne à n lignes formé par les valeurs de la mesure X sur les individus de l'échantillon, et $\vec{y}$ le vecteur colonne à n lignes formé par les valeurs de la mesure Y sur les individus de l'échantillon. Appliquez la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la famille $\vec{1}, \vec{x}, \vec{y}$.

1. Décrire la suite des vecteurs produit par le procédé de Gram-Schmidt.
2. Relier les étapes de la procédure aux résultats de la régression simple de Y par rapport) X.

Régression multiple

Dans un problème de régression mutilple on note Z le *design* (que l'on suppose de plein rang), Y la variable à expliquer et θ le vecteur colonne des coefficients à déterminer. On cherche $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}^p$ qui minimise $\|Y - Z\theta\|^2$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}^p$. On note $\widehat{Y}$ la projection orthogonale sur le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les colonnes de Z

1. Que vaut $(Y - \widehat{Y})^T Z$?
2. Justifiez $\|Y - Z\theta\|^2 = \|Y - \widehat{Y}\|^2 + \|\widehat{Y} - Z\theta\|^2$.
3. Justifier $\widehat{Y} = Z\widehat{\theta}$
4. Montrer que $Z(Z^T Z)^{-1} Z^T$ est bien définie.
5. Montrer que $Z(Z^T Z)^{-1} Z^T \vec{\alpha}$ est la projection orthogonale de $\vec{\alpha}$ sur le sous-espace engendré par les colonnes de Z.
6. Si on recentre les colonnes de Z sauf la première, change-t-on le sous-espace engendré par les colonnes ?
7. Si les colonnes de Z (sauf la première) sont centrées, comment peut-on interpréter la matrice $Z^T Z$?