SD-TSIA204 : Interval of confindence

François Portier et Joseph Salmon
http://josephsalmon.eu
Télécom Paristech, Institut Mines-Télécom

Outline

Table of Contents

Intervalle de confiance

- Contexte : on a une estimation $\hat{g}(y_1, \ldots, y_n)$ d'une grandeur $g(\theta)$. On veut un intervalle $\hat{I}$ autour de $\hat{g}$ qui contient g avec une grande probabilité.
- On construit $\hat{I} = [A, B]$ à partir des observations $(y_1, \ldots, y_n)$: l'intervalle est une variable aléatoire

$$\mathbb{P}(\hat{I} \text{ contient } g) = \mathbb{P}(A \leqslant g \text{ et } B \geqslant g) = 95\%$$

Intervalle de confiance de niveau α

Intervalle de confiance

Un intervalle de confiance de niveau α pour la grandeur $g = g(\theta)$ est une fonction de l'échantillon

$$\hat{I} : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \hat{I} = [A(y_1, \ldots, y_n), B(y_1, \ldots, y_n)]$$

telle que, quelle que soit le paramètre $\theta \in \Theta$,

$$\mathbb{P}\left[g(\theta) \in \hat{I}(y_1, \ldots, y_n)\right] \geqslant 1 - \alpha \qquad \text{lorsque } y_i \sim \mathbb{P}_\theta$$

Rem:des choix classiques sont $\alpha = 5\%, 1\%, 0.1\%$, etc.

Rem:Dans la suite on notera IC pour Intervalle de Confiance

Exemple : sondage

- Sondage d'une élection à deux candidats : A et B. Le choix du i^{e} sondé suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $y_i = 1$ s'il vote A, 0 sinon. Ainsi,
$$\Theta = [0,1] \text{ et } \theta = p.$$
- But : estimer $g(\theta) = p$.
- échantillon de taille n : un estimateur raisonnable est alors
$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}_n$$

  intervalle de confiance pour p ?

Sondage : intervalle de confiance

- Chercher un intervalle $\hat{I} = [\hat{p} - \delta, \hat{p} + \delta]$ tel que $\mathbb{P}(p \in \hat{I}) \geqslant 0.95 \Leftrightarrow$ chercher δ tel que $\mathbb{P}\left[\, |\hat{p} - p| \; > \delta\right] \leqslant 0.05$
- Ingrédient : inégalité de **Tchebyschev** (si $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$)

$$\boxed{\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \delta) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\delta^2}}$$

Pour $X = \hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ on a $\mathbb{E}(\hat{p}) = p$ et $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$:

$$\forall p \in (0,1), \forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|\hat{p} - p| > \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

Application numérique : pour un IC à 95%, choisir δ tel que $\frac{1}{4n\delta^2} = 0.05$, *i.e.*, $\delta = (0.2n)^{-1/2}$. Si $n = 1000$, $\hat{p} = 55\%$:

$\delta = 0.07$; $\hat{I} = [0.48, 0.62]$

Théorème central limite

- $y_1, y_2, \ldots,$ des variables aléatoires *i.i.d.* de carré intégrable.
- μ et σ leur espérance et écart-type théoriques.

Théorème central limite (TCL)

La loi de la moyenne empirique re-normalisée $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{y}_n - \mu}{\sigma}\right)$ converge vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

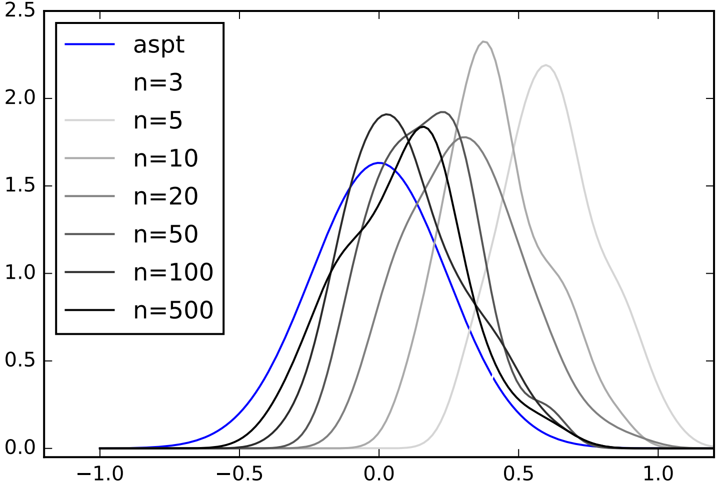
- σ est connu

Lemme de Slutsky

La loi de la moyenne empirique "studentizée" $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{y}_n - \mu}{\hat{\sigma}}\right)$ converge vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ quand $\hat{\sigma} \to \sigma$

Reformulation : $\bar{y}_n \simeq \mathcal{N}(\mu, \hat{\sigma}^2/n)$

Illustration



Intervalles de confiance asymptotiques

- Exemple du sondage : $y_i \in \{0,1\}$, $n = 1000$,
$$\hat{p} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0.55$$
- On suppose que n est suffisamment grand pour que
$$\sqrt{n} \left(\frac{\hat{p} - p}{\hat{\sigma}} \right) \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{p})^2 = \hat{p} - \hat{p}^2$$
- On connaît les quantiles de la loi normale (numériquement)
- D'après le TCL, et l'approximation des quantiles gaussiens
$$\mathbb{P}\left[-1.96 < \sqrt{n}\, \frac{0.55 - p}{\hat{\sigma}} < 1.96 \right] \approx 0.95$$

  nouvel intervalle de confiance : $\hat{I} = [0.52, 0.58]$: meilleur !
  (**plus optimiste**)

En Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm

n = 1000
x = np.random.binomial(1, .5, n)
```

```
pchap = np.mean(x)
sig = np.sqrt(pchap * (1 - pchap))
alpha = .05
q = norm.ppf(1 - alpha/2)
borneinf = pchap - sig * q / np.sqrt(n)
bornesup = pchap - sig * (1 - q) / np.sqrt(n)
print('IC = [' + str(borneinf) +
      ',' + str(bornesup) + ']')
```

IC pour les moindres carrés (I)

Rappel : prenons $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, alors $\hat{\sigma}^2 = \|\mathbf{y} - X\hat{\boldsymbol{\theta}}\|_2^2/(n - \mathrm{rg}(X))$ est un estimateur sans biais de la variance. Ainsi :

Si $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \, \mathrm{Id}_n)$, alors $\boxed{T_j = \dfrac{\hat{\theta}_j - \theta_j^*}{\hat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{j,j}}} \sim \mathcal{T}_{n-\mathrm{rg}(X)}}$

où $\mathcal{T}_{n-\mathrm{rg}(X)}$ est une loi dite de Student (de degré $n - \mathrm{rg}(X)$).

Sa densité, ses quantiles, etc. peuvent être calculés numériquement.

IC pour les moindres carrés (II)

Sous l'hypothèse gaussienne, comme

$$T_j = \frac{\hat{\theta}_j - \theta_j^*}{\hat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{j,j}}} \sim \mathcal{T}_{n-\mathrm{rg}(X)}$$

et en notant $t_{1-\alpha/2}$ un quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{T}_{n-\mathrm{rg}(X)}$, alors l'intervalle de confiance suivant est de niveau α

$$\left[\hat{\theta}_j - t_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{j,j}}, \hat{\theta}_j + t_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}\sqrt{(X^\top X)^{-1}_{j,j}}\right]$$

pour la quantité θ_j^*.
<ins>Rem</ins>: $\mathbb{P}(|T_j| < t_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$ car la loi de Student est symétrique

Limites des IC précédent

Dans la partie précédente, l'intégralité des raisonnement repose sur le modèle gaussien.

Attention : si le modèle est (trop) faux alors les IC obtenus ne seront pas forcément pertinents.

Alternative possible : *bootstrap*, une méthode non-paramétrique reposant sur le ré-échantillonnage, bien fondée (théoriquement) pour des statistiques régulières telle que la moyenne, les quantiles, etc., (mais pas pour le max ou le min !)

Pour aller plus loin : Efron et Tibshirani (1994)

Références I

- B. Efron and R. Tibshirani.
  An introduction to the bootstrap.
  CRC press, 1994.