Université de Montpellier **HLMA408**
2020/2021 **Joseph Salmon**

TD N° 1 : Introduction et rappels

Exercice 1. Croissance exponentielle (intérêt)

Un jeune salarié cherche à constituer une épargne pour un achat immobilier 10 ans plus tard. Deux banques lui proposent chacune un dispositif d'épargne qui bloque l'épargne sur cette période.

La Banque du Sud propose un taux d'intéret constant de 1% par an sur 10 ans. La Banque de l'Ouest propose un taux d'intérêt de 2% pendant 5 ans puis de 0% pendant les 5 ans qui suivent.

a) Quelle banque conseilleriez-vous ?

b) Quel taux d'intérêt la banque du Sud devrait-elle choisir pour rémunérer son client autant que la banque de l'Ouest au bout de 10 ans ?

Exercice 2. Croissance exponentielle (virus)

Deux variants d'un virus existe. Le premier (Virus1) se reproduit et sa population augmente de 20% tous les ans. Le second (Virus2) se reproduit avec un taux de croissance de 140% une année sur 5, et suit ensuite une décroissance de 1% les 4 années qui suivent.

— Quel est le variant qui se répandera le plus rapidement au bout de 5 ans ?

— Pour quel taux de décroissance le Virus2 aura la même croissance au bout de 5 ans que le Virus1 ?

Exercice 3. Moyenne harmonique Un oiseau migrateur part de La Havanna (Cuba) pour Toronto (Canada) pour passer son été au frais. Il revient ensuite à Cuba pour passer son hivers au chaud. À l'aller sa vitesse il vole à la vitesse $v_1 = 100\text{km/h}$. Au retour, porté par les vents favorables, il revient avec une vitesse $v_2 = 200\text{km/h}$.

a) Quelle est v la vitesse moyenne de l'oiseau sur son trajet aller-retour ?

b) (Bonus) Même question si l'on rajoute une étape et que le voyage devient : "La Havanna $\to$ Toronto $\to$ Lubbock (USA)$\to$ La Havanna" (on suppose les 3 villes équidistantes), et que la vitesse entre La Havanna et Toronto est $v_1 = 100km/h$, que celle entre Toronto et Lubbock est $v_2 = 300km/h$, et que celle entre Lubbock et La Havanna est $v_2 = 200km/h$.

Rappel sur les lois normales. On note Φ (resp. φ) la fonction de répartition (resp. la densité) d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite :

$$\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \ .$$

En particulier, on notera que $\Phi(0) = 1/2$ (symétrie) et que $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$

Exercice 4. Centrer / Réduire

On rappelle que, si $Z = \sigma X + \mu$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (*i.e.*, X suit une loi normale centrée réduite), alors Z suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et de variance σ^2. Donner la fonction de répartition $\Phi_{\mu,\sigma}$ et la densité $\varphi_{\mu,\sigma}$ de la variable Z. Donner également le lien entre $\varphi_{\mu,\sigma}$ et $\Phi_{\mu,\sigma}$.

Exercice 5. (Probabilités d'évènement et lois gaussiennes)

Soit X une variable distribuée suivant une loi normale centrée réduite. Donner la valeur des probabilités ci-dessous en fonction de la fonction Φ donnée en rappel (et potentiellement de constantes numériques que vous préciserez).

1) $\mathbb{P}(X \leq 1.37)$, $\mathbb{P}(X > 1.37)$ et $\mathbb{P}(X = 1.37)$;

2) $\mathbb{P}(X < 0.52)$ et $\mathbb{P}(X \leq -0.52)$;

3) $\mathbb{P}(X > 1.79)$ et $\mathbb{P}(X > -1.79)$;

4) $\mathbb{P}(-0.155 < X < 1.60)$, $\mathbb{P}(-1.3 < X < 2.1)$ et $\mathbb{P}(0.06 < X < 0.8)$;

5) $\mathbb{P}(X < -1.9 \text{ ou } X > 2.1)$;

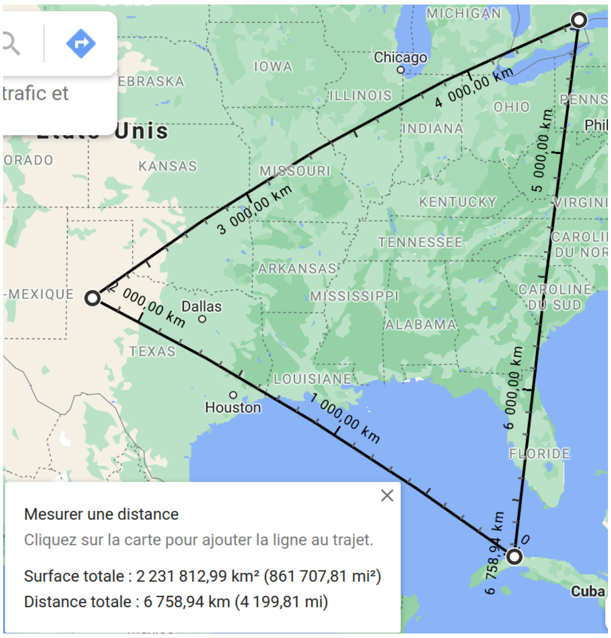

FIGURE 1 – Visualisation du voyage : La Havanna → Toronto → Lubbock → La Havanna.

6) $\mathbb{P}(|X| < 1.64)$, $\mathbb{P}(|X| < 1)$.

EXERCICE 6. Probabilités d'évènement et lois gaussiennes, bis

Soit Z de loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 5. Calculer $\mathbb{P}(Z < 18)$, $\mathbb{P}(Z \leq 39)$, $\mathbb{P}(Z > 37)$, $\mathbb{P}(Z > 11)$ et $\mathbb{P}(22 \leq Z \leq 31)$.

EXERCICE 7. (Quantiles gaussiens)

Soit Z de loi normale d'espérance 130 et d'écart-type 5. Résoudre chacune des équations suivantes (l'inconnue est b) en utilisant $q = \Phi^{-1}$, la fonction quantile de la loi normale centrée réduite :

1) $\mathbb{P}(Z < b) = 0.975$,
2) $\mathbb{P}(Z > b) = 0.025$,
3) $\mathbb{P}(Z < b) = 0.305$.

EXERCICE 8. (Quartiles approchés et histogrammes)

TABLE 1 – Distribution du nombre de cigarettes fumées par jour pour les 484 mères fumeuses.

Nb de cig.	Nb. de fumeurs (%)
0–5	16
5–10	25
10–15	14
15–20	4
20–30	32
30–40	5
40–60	4
Total	100

a) A partir du Tableau 1 trouver des quartiles approchés de la distribution du nombre de cigarettes fumées par jour des mères fumeuses pendant la grossesse.

b) Combinez les quatre dernières classes de ce tableau et tracez l'histogramme qui estime la densité : on veillera à proposer une courbe d'aire égale à 1.

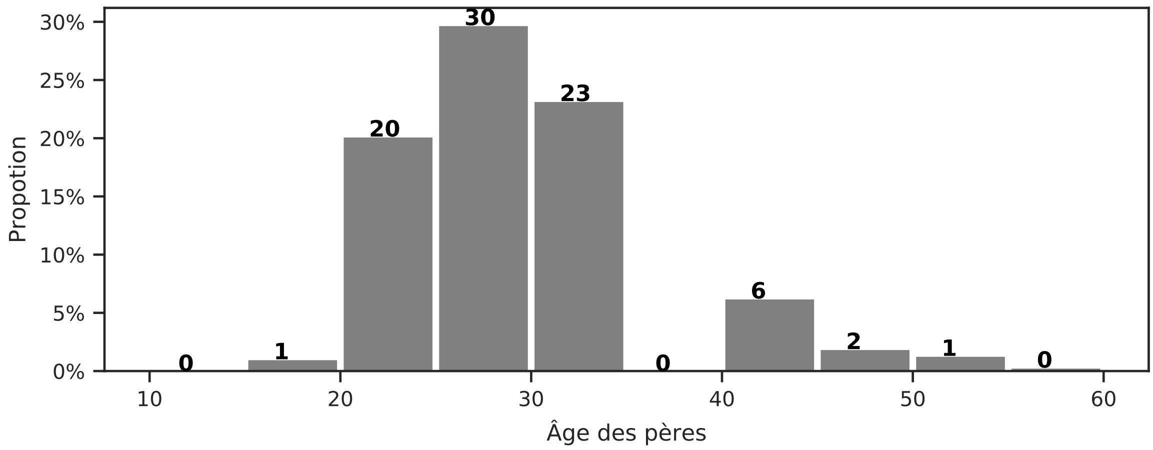

FIGURE 2 – Histogramme de l'âge des pères dans l'étude CHDS vue en cours. Les nombres indiquent la hauteur (en %) de chaque rectangle. Le rectangle pour la classe $[35, 40[$ est manquant.

c) Regardez l'histogramme de la Figure 2. On a oublié de faire le graphique pour une classe, celle correspondant aux âges entre 35 et 40 ans, que l'on a rempli à tort avec un 0. Comblez cette lacune.

EXERCICE 9. (Moyennes et écart-types)

a) Dans une étude du Missouri, le poids moyen à la naissance des bébés issus de mères fumeuses est 3180g et l'écart-type de 500g. Quel est le poids moyen et l'écart-type en onces sachant qu'il y a 0.035 onces dans 1g.

b) Soient $x_1, \ldots, x_n$ quelques observations. Pour des raisons de commodités, Bob a changé les unités menant à de nouvelles observations

$$y_i = ax_i + b, \qquad i = 1, \ldots, n \ ,$$

avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Exprimez la moyenne et l'écart-type des y_i en fonction de ceux des x_i, et des constantes a et b.

EXERCICE 10. La loi normale et boîte à moustache

a) On modélise la loi de la taille des mères (dans la même étude que celle vue en cours) par une loi normale d'espérance 64 pouces et d'écart-type 2.5 pouces. Utiliser cette approximation et la fonction Φ pour estimer la proportion de mères mesurant entre 61.5 et 64.5 pouces. Aide : on pourra utiliser les approximations $\Phi(0.2) \approx 0.5793$ et $\Phi(1) \approx 0.8413$.

b) Supposons que l'on dispose d'observations issues d'une loi normale centrée réduite. Quelle proportion des observations peut-on espérer voir en dehors des « moustaches » de la boîte à moustache ? Aide : on pourra utiliser les approximations $\Phi(0.675) \approx 0.75$ et $\Phi(2.7) \approx 0.9965$.