HMMA237

Modèles à espace d'états (variables cachées latentes)

Cours: Joseph Salmon *Scribes: MASSOL Océane et JOLY Julien*

Un référence bibliographique pour ce cours est le livre [SS17].

1 La théorie du contrôle (contrôler des objets)

Qu'entendons-nous par le terme objet dans ce contexte ?

Ici, les objets peuvent représenté des corps dont on suit la trajectoire, comme par exemple des missiles, des drônes ou même des satellites ou des fusées. Cette théorie s'est développée, comme souvent pour les théoriques de mathématiques appliqées, dans un contexte de guerre (amélioration des missiles durant la Seconde Guerre mondiale, conquête spatiale pendant la guerre froide).

Cette théorie a des liens avec d'autres domaines d'étude tels que :

- **La mécanique** pour le contrôle de trajectoires, l'information de la position, l'information de la vitesse et de l'accélération (voir les travaux de Kalman dans les années 1960).
- **La finance** pour « contrôler » un portefeuille financier.

Deux principes fondamentaux en théorie du contrôle

- $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus d'état Markovien, c'est-à-dire :
  $\{x_s$, s>t$\} \perp\!\!\!\perp \{x_{s'}$, s'<t$\}$ conditionnellement à x_t
- $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ les observations où $y_t \perp\!\!\!\perp y_{t'}$ conditionnellement à x_t (avec t et t' des instants).

Notons que la dépendance entre les observations n'apparait donc qu'à travers les états $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

Exemples d'applications

Mesures sanguines : Remarquons que si le temps est discrétisé, nous avons une information de plus en plus partielle. Nous modélisons alors cela grâce à l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} x_t = \varphi\, x_{t-1} + \varepsilon_t \\ y_t = A_t\, x_t + \xi_t \end{cases} \tag{1}$$

avec ε_t et ξ_t des bruits et $\varphi \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, (x_t) états, (y_t) observations et $x_t \in \mathbb{R}^3$.

De plus,

$$A_t = \begin{cases} \mathrm{Id}_3, & \text{si état observé} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

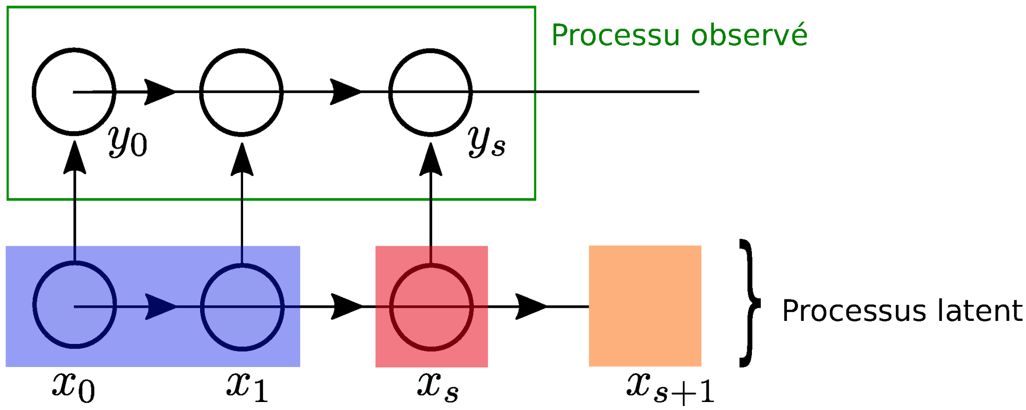

FIGURE 1 – Représentation de l'indépendance entre x_s et $x_{s'}$

Le réchauffement climatique : Dans ce contxte, nous avons les éléments suivants :

- y_{1t} : température moyenne océan/terre
- y_{2t} : température moyenne à la surface de la Terre
- x_t : température moyenne de la Terre

Nous prenons des modèles linéaires pour éviter les complications. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} y_t &= \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_t \\ x_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} && (3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} && (4) \end{aligned}$$

où $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$ est un bruit.

Un processus auto-régressif (avec bruit vectoriel) : Soit le processus auto-régressif suivant :

$$\begin{cases} y_t = & x_t + \xi_t \\ x_t = & \varphi\, x_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases} \tag{5}$$

où nous avons :

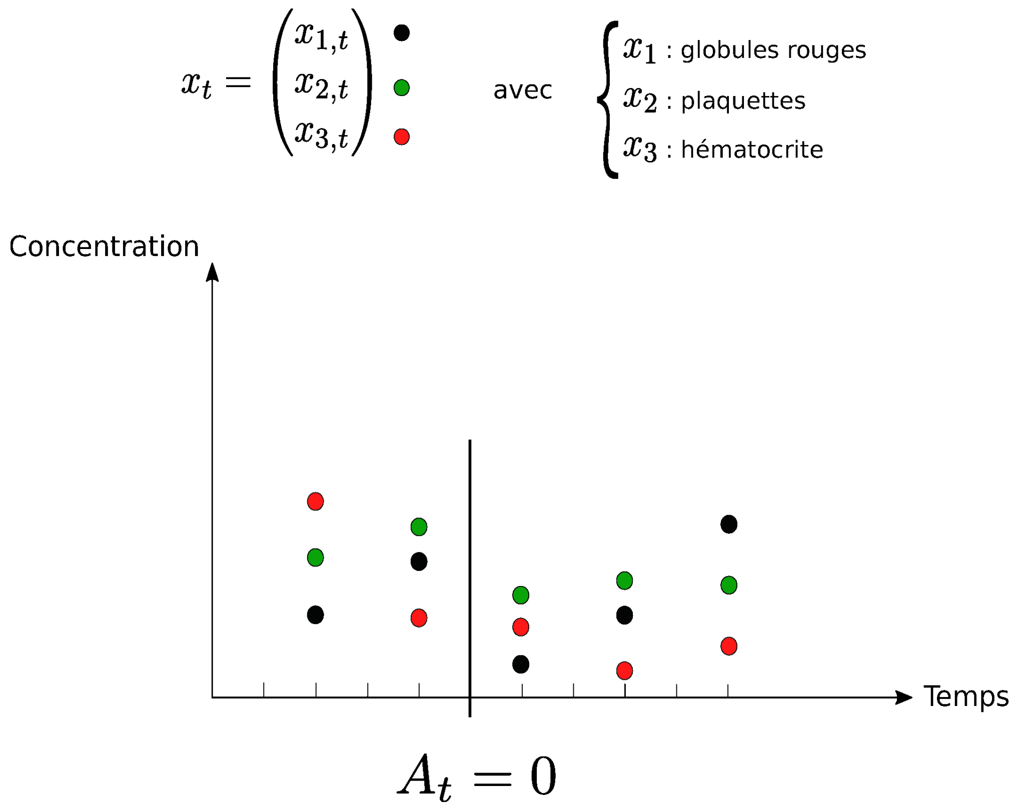

FIGURE 2 – Evolution au cours du temps des informations sanguines (globules rouges, plaquettes et hématocrite)

$$\begin{aligned}
\xi_t &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2 \,\mathrm{Id}) \\
\varepsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 \,\mathrm{Id}) \\
x_0 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 \,\mathrm{Id})
\end{aligned}$$

Les $(\xi_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et identiquement distribués (iid).

De plus, $(\xi_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont indépendants de x_0, qui est l'état initial.

On calcule maintenant l'auto-covariance de x :

$$\begin{aligned}
\gamma_x(h) &= \mathrm{Cov}(x_t; x_{t+h}) && (6)\\
&= \mathrm{Cov}(x_0; x_h) \quad \text{(car le processus est stationnaire)} && (7)\\
&= \mathrm{Cov}(x_0; \varphi x_{h-1} + \varepsilon_h) && (8)\\
&= \varphi \,\mathrm{Cov}(x_0; x_{h-1}) \quad \text{(par indépendance de} x_0 \text{ et } \varepsilon_h) && (9)\\
&= \varphi^h \,\mathrm{Cov}(x_0; x_0) \quad \text{(par récurrence)} && (10)\\
&= \varphi^h \sigma_0^2 && (11)
\end{aligned}$$

Remarque : Le processus est stationnaire :

$$\begin{aligned} \gamma_y(h) &= \text{Cov}(y_0; y_h) \\ &= \text{Cov}(x_0 + \xi_0; x_h + \varepsilon_h) \\ &= \text{Cov}(x_0; x_h) \ (\textit{par iid des bruits}) \end{aligned} \tag{12}$$

2 Vocabulaire : filtrage/lissage

Soit $\{y_0, \ldots, y_s\}$ observations jusqu'à l'instant s.

— Si l'on souhaite "prédire" x_s, qui est la vraie position à un temps donné, on appelle cela du filtrage.
— On parle de prédiction si l'on veut fournir une valeur pour x_t avec $t > s$.
— On parle de lissage si l'on estime x_t avec $t < s$.

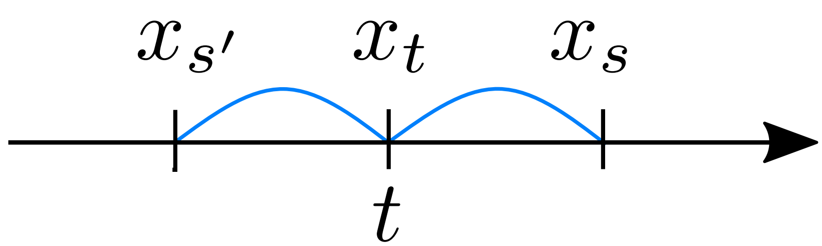

FIGURE 3 – Représentation shématique du filtrage (en rouge), de la prédiction (en orange) et du lissage (en bleu)

Références

[SS17] R. H. Shumway and D. S. Stoffer. Time series analysis and its applications : with R examples. Springer, 2017. 1