
TD N° 2 : Filtre de Kalman, etc.

Exercice 1. (Espace d'état). Considérons un processus de dimension 4, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. À chaque instant, t, l'état X_t est un vecteur colonne $(X_{t,1}X_{t,2}X_{t,3}X_{t,4})^\top$, dont l'équation d'état relie ainsi X_t à X_{t-1} :

$$X_t = \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 & 0 & 0 \\ \eta_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_{t-1} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \alpha_1\varepsilon_t \\ \alpha_2\varepsilon_t \\ \alpha_3\varepsilon_t \end{pmatrix} ,$$

où $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont réels, et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est alors relié à $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par l'équation $Y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_t$. Montrer Le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ peut s'exprimer comme un modèle ARMA(p,q), pour des paramètres p et q, ainsi que les paramètres AR et MA à préciser en fonction de $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Correction:

Premier point :

Exercice 2. (Espace d'état avec erreurs corrélées) Soit le processus ARMA$(1,1)$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad Y_t = \varphi Y_{t-1} + \theta V_{t-1} + V_t,$$

avec $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite i.i.d de gaussiennes centrées réduites. Soit maintenant le modèle pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_{t+1} = \Phi X_t + G V_t, \quad \text{et} \quad Y_t = X_t + V_t \ ,$$

avec $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini ci-dessus. Notez que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont univariés (i.e., de dimension un), et donc que $\Phi \in \mathbb{R}$ et $G \in \mathbb{R}$.

1) Donner l'expression de Φ et G en fonction de ϕ et θ pour que, si $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suit la seconde dynamique alors il suive aussi le modèle ARMA ci-dessus.
2) Pour spécifier le modèle d'état, on suppose que $X_0 \sim \mathcal{N}(m_{0|0}, V_{0|0})$, avec $m_{0|0} \in \mathbb{R}$ et $V_{0|0} > 0$, et que X_0 est indépendant de $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Donner la distribution de X_1 et de X_2.
3) Pour $t \geqslant 2$, supposons que X_t sachant $Y_1 = y_1, \ldots, Y_{t-1} = y_{t-1}$ suit une loi normale d'espérance $m_{t|t-1}$ et de variance $V_{t|t-1}$. Calculer la loi de (X_{t+1}, Y_t) sachant que $Y_1 = y_1, \ldots, Y_{t-1} = y_{t-1}$, et déduire l'espérance $m_{t+1|t}$ ainsi que la variance $V_{t+1|t}$ de X_{t+1} sachant $Y_1 = y_1, \ldots, Y_{t-1} = y_{t-1}, Y_t = y_t$.
4) En utilisant les questions précédentes, proposer une méthode pour calculer récursivement les quantités $m_{t|t} = \mathbb{E}\left[X_t | Y_1 = y_1, \ldots, Y_t = y_t\right]$ et $V_{t|t} = \mathbb{V}\left[X_t | Y_1 = y_1, \ldots, Y_t = y_t\right]$.

Exercice 3. (Initialisation). Soit le modèle donné par $Z_t = -\frac{1}{2} Z_{t-2} + W_t$, et $Y_t = Z_t + V_t$, pour tout $t \geqslant 2$, avec $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ gaussien i.i.d centré réduit (et indépendants entre eux). Noter que Y_t n'est défini que pour $t \geqslant 2$ seulement.

1) Écrire le modèle d'espace d'état avec l'équation $X_t = \Phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $Y_t = A X_t + \xi_t$, en spécifiant les dimensions de X_t , les matrices Φ et A, et les variables $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
2) Supposons que $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ et que $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et que Z_0 et Z_1 sont indépendants l'un de l'autre, ainsi que de W_t et V_t pour tout t. Trouver les valeurs σ_0 et σ_1 nécessaires pour $(Y_t)_{t\geqslant 2}$ soit faiblement stationnaire.