

MS BGD

MDI 720 : Descente par coordonnée

Joseph Salmon

<http://josephsalmon.eu>

Télécom Paristech, Institut Mines-Télécom

Plan

Descente par coordonnée

- Définition et visualisation

- Cas des moindres carrés

- Cas de Ridge

- Cas du Lasso

- Cas non-convexes

Alternatives pour le Lasso

Sommaire

Descente par coordonnée

- Définition et visualisation

- Cas des moindres carrés

- Cas de Ridge

- Cas du Lasso

- Cas non-convexes

Alternatives pour le Lasso

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_2^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_2 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_2^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_2 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_3^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_3 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_2^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_2 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_3^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_3 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

\vdots

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_2^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_2 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_3^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_3 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

\vdots

$$\theta_p^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_p \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k)}, \theta_p)$$

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_2^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_2 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_3^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_3 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

\vdots

$$\theta_p^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_p \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k)}, \theta_p)$$

Sorties : $\theta^{(K)}$

Descente par coordonnée

Objectif : trouver une solution (approchée !) de $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} f(\theta)$

Algorithme : Descente par coordonnée

Entrées : f , nombre d'« époques » K (ou de « passes »)

Initialisation : $k = 0$ et $\theta^{(k)} = 0 \in \mathbb{R}^p$

pour $k = 1, \dots, K$ **faire**

$$\theta_1^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_1 \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_2^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_2 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

$$\theta_3^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_3 \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3, \dots, \theta_{p-1}^{(k-1)}, \theta_p^{(k-1)})$$

\vdots

$$\theta_p^{(k)} \leftarrow \arg \min_{\theta_p \in \mathbb{R}} f(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k)}, \theta_p)$$

Sorties : $\theta^{(K)}$

Critères d'arrêts : itérés stables, objectifs stables, saut de dualité ...

Parcours possibles

On doit visiter toutes les coordonnées **régulièrement** pour assurer la convergence. Les parcours les plus courants sont les suivants :

- parcours cyclique (Gauss-Seidel)

Parcours possibles

On doit visiter toutes les coordonnées régulièrement pour assurer la convergence. Les parcours les plus courants sont les suivants :

- ▶ parcours cyclique (Gauss-Seidel)
- ▶ parcours aléatoire avec remise : on tire de manière uniforme *i.i.d.* les coordonnées à mettre à jour

Parcours possibles

On doit visiter toutes les coordonnées régulièrement pour assurer la convergence. Les parcours les plus courants sont les suivants :

- ▶ parcours cyclique (Gauss-Seidel)
- ▶ parcours aléatoire avec remise : on tire de manière uniforme *i.i.d.* les coordonnées à mettre à jour
- ▶ parcours aléatoire sans remise : on tire de manière *i.i.d.* une permutation aléatoire des coordonnées ( : *shuffle*) après chaque époque

Parcours possibles

On doit visiter toutes les coordonnées régulièrement pour assurer la convergence. Les parcours les plus courants sont les suivants :

- ▶ parcours cyclique (Gauss-Seidel)
- ▶ parcours aléatoire avec remise : on tire de manière uniforme *i.i.d.* les coordonnées à mettre à jour
- ▶ parcours aléatoire sans remise : on tire de manière *i.i.d.* une permutation aléatoire des coordonnées ( : *shuffle*) après chaque époque
- ▶ parcours glouton (Gauss-Southwell) : on cherche de manière itérative la coordonnée la meilleure (*e.g.*, celle qui fait le plus bouger ou qui diminue le plus la fonction objective)

Intérêt de la descente par coordonnée

- ▶ utilité quand p est (très) grand
- ▶ stratégie par “bloc” : on met à jour tout un groupe/bloc ( : *Block Coordinate Descent*) de coordonnées
- ▶ la convergence est assurée vers un minimum pour les cas :

1. Fonction lisse :

$$\arg \min_{\theta} f(\theta)$$

avec f convexe différentiable

2. Fonction lisse + fonction séparable

$$\arg \min_{\theta} f(\theta) + g(\theta)$$

avec f convexe différentiable, et g convexe séparable :

$$g(\theta) = \sum_{j=1}^p g_j(\theta_j), \text{ cf. Tseng (2001)}$$

Intérêt de la descente par coordonnée

- ▶ utilité quand p est (très) grand
- ▶ stratégie par “bloc” : on met à jour tout un groupe/bloc ( : *Block Coordinate Descent*) de coordonnées
- ▶ la convergence est assurée vers un minimum pour les cas :

1. Fonction lisse :

$$\arg \min_{\theta} f(\theta)$$

avec f convexe différentiable

2. Fonction lisse + fonction séparable

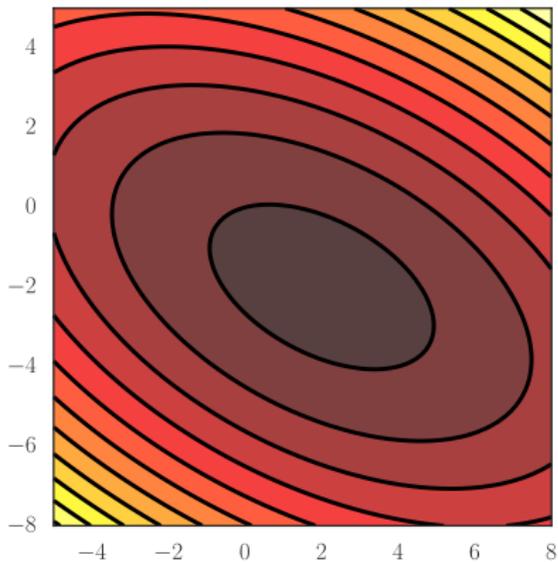
$$\arg \min_{\theta} f(\theta) + g(\theta)$$

avec f convexe différentiable, et g convexe séparable :

$$g(\theta) = \sum_{j=1}^p g_j(\theta_j), \text{ cf. Tseng (2001)}$$

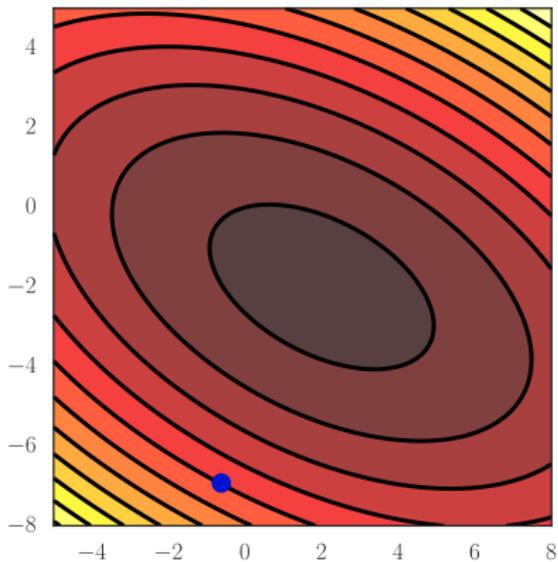
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses
cf. Tseng (2001)



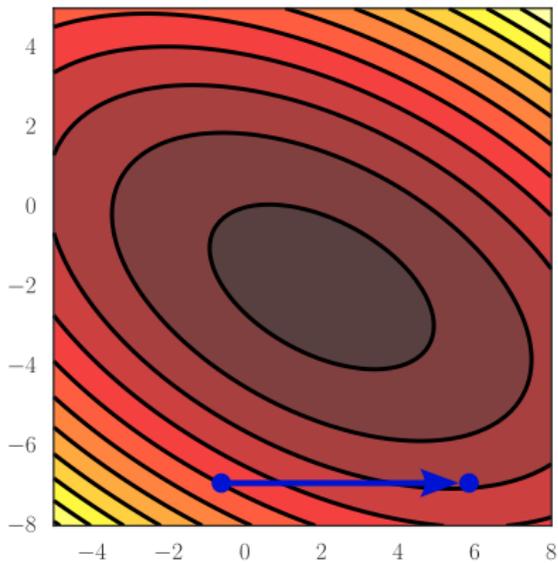
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses
cf. Tseng (2001)



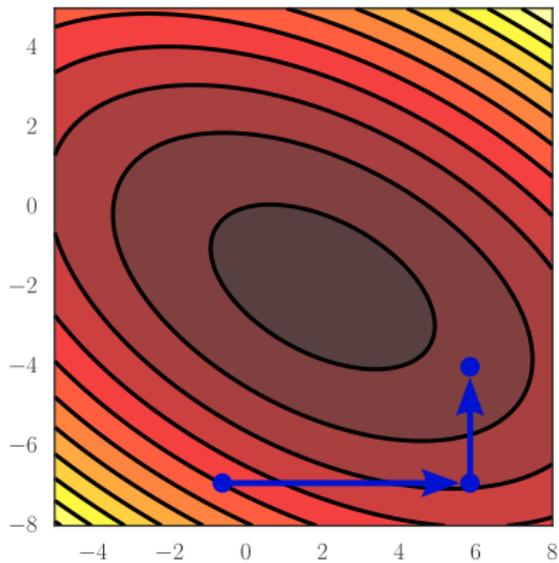
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses
cf. Tseng (2001)



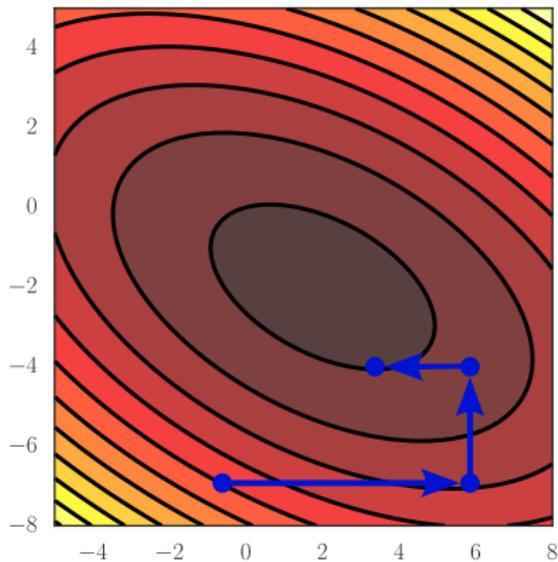
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses
cf. Tseng (2001)



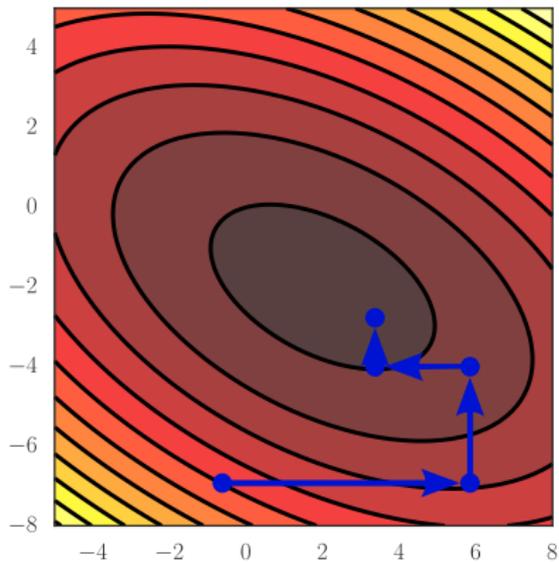
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses
cf. Tseng (2001)



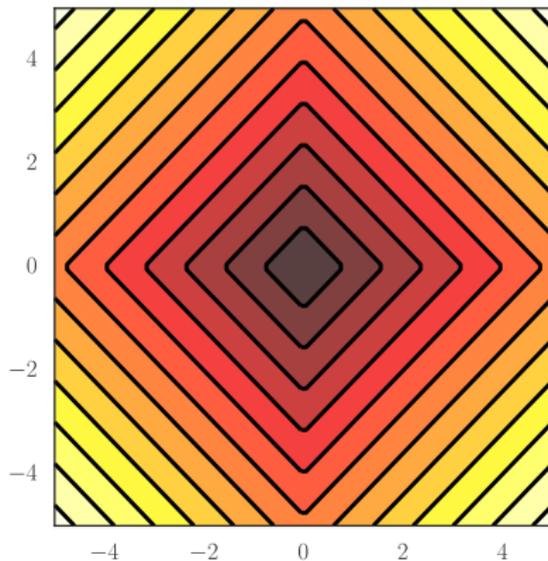
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses
cf. Tseng (2001)



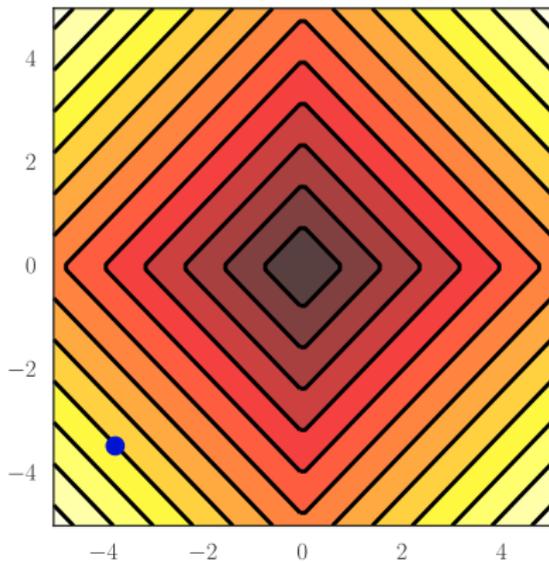
Motivation (cas convexe)

- ▶ Convergence vers un minimum pour des fonctions séparables
cf. Tseng (2001)



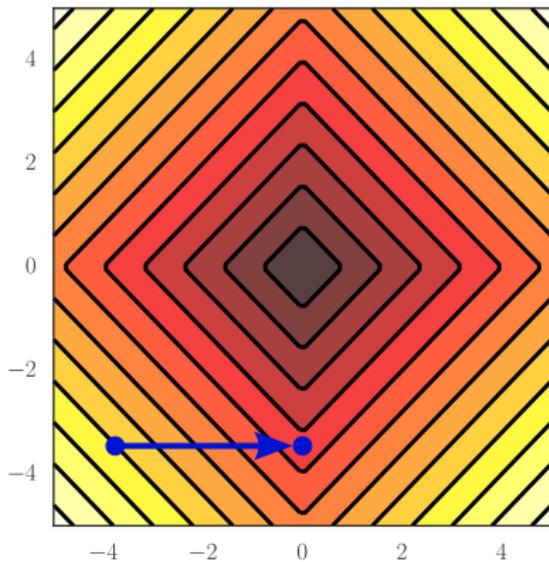
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions séparables
cf. Tseng (2001)



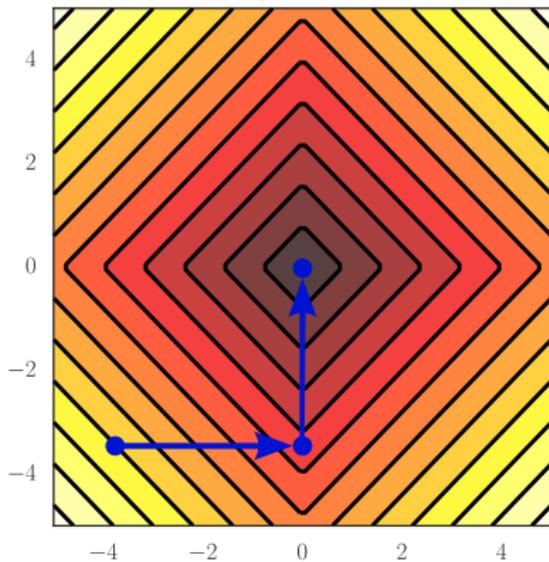
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions séparables
cf. Tseng (2001)



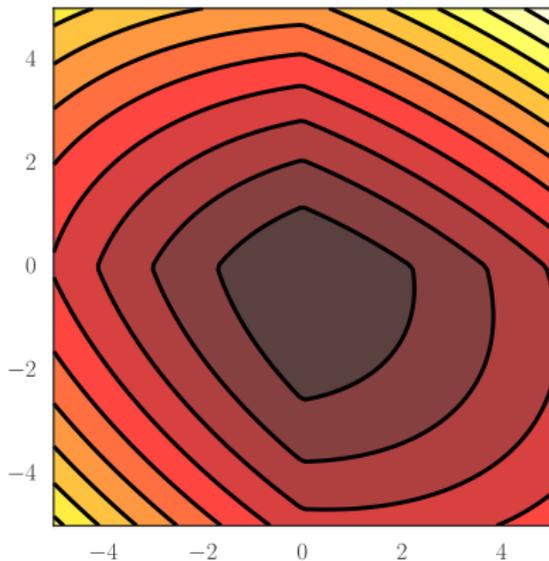
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions séparables
cf. Tseng (2001)



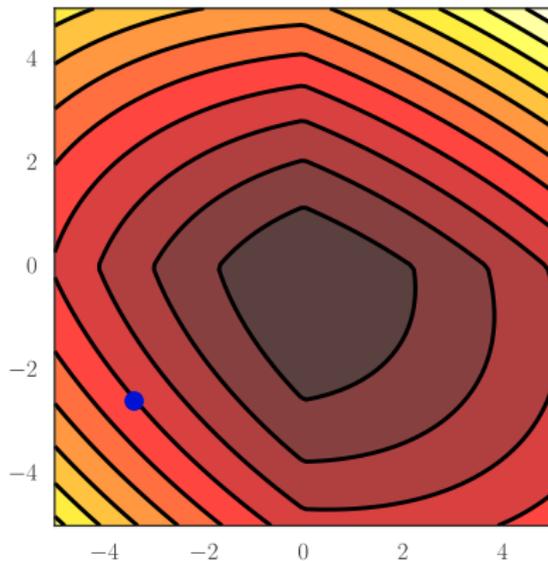
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses + séparables cf. Tseng (2001)



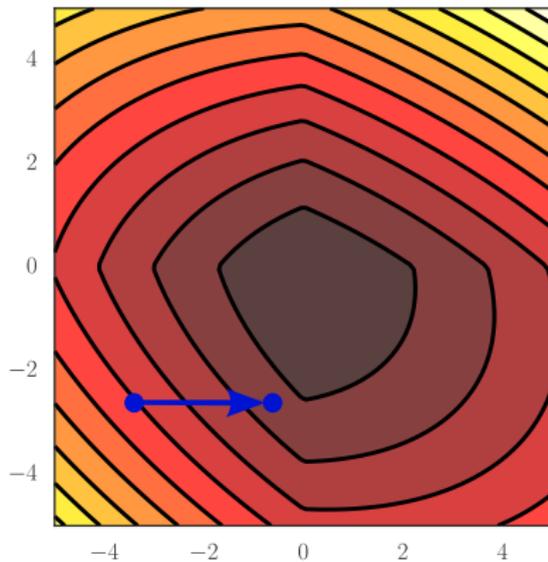
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses + séparables cf. Tseng (2001)



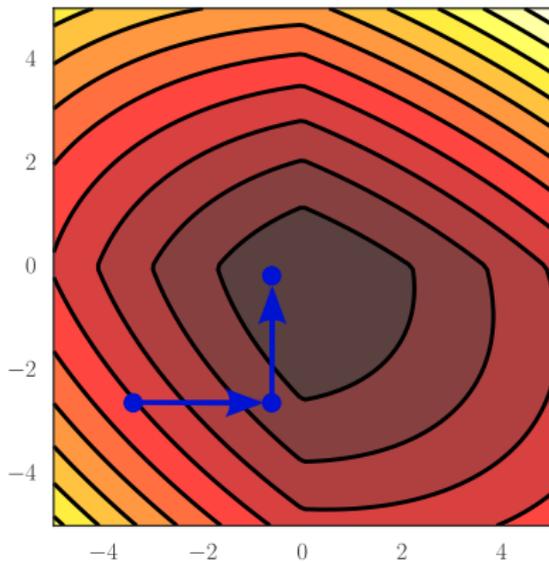
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses + séparables cf. Tseng (2001)



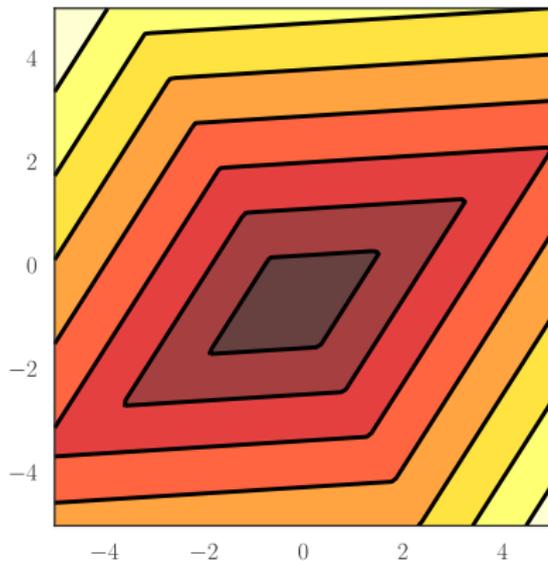
Motivation (cas convexe)

- Convergence vers un minimum pour des fonctions lisses + séparables cf. Tseng (2001)



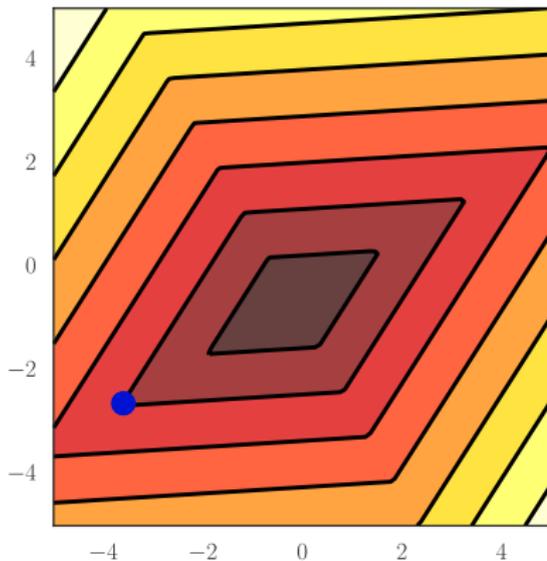
Motivation (cas convexe)

- ▶ Attention : pas (toujours) convergence vers un minimum pour des fonctions non-séparables/non-lisses



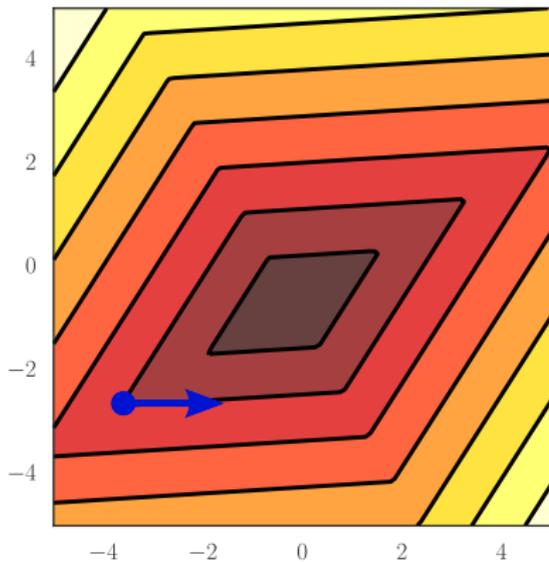
Motivation (cas convexe)

- ▶ Attention : pas (toujours) convergence vers un minimum pour des fonctions non-séparables/non-lisses



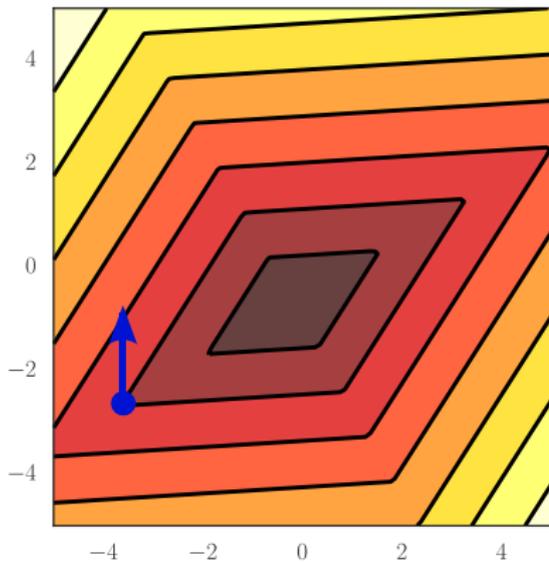
Motivation (cas convexe)

- ▶ Attention : pas (toujours) convergence vers un minimum pour des fonctions non-séparables/non-lisses



Motivation (cas convexe)

- ▶ Attention : pas (toujours) convergence vers un minimum pour des fonctions non-séparables/non-lisses



Sommaire

Descente par coordonnée

Définition et visualisation

Cas des moindres carrés

Cas de Ridge

Cas du Lasso

Cas non-convexes

Alternatives pour le Lasso

Moindre carrés

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{i,j})^2$$

Rappel : $\nabla f(\boldsymbol{\theta}) = X^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_p}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$

Moindre carrés

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{i,j})^2$$

Rappel : $\nabla f(\boldsymbol{\theta}) = X^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_p}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$

Minimiser en θ_j en fixant θ_k pour $k \neq j \Leftrightarrow$ annuler la j^{e} dérivée partielle

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_j^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{x}_j \theta_j + \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k \theta_k - \mathbf{y} \right)$$
$$\Leftrightarrow \theta_j = \frac{\mathbf{x}_j^\top (\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k \theta_k)}{\mathbf{x}_j^\top \mathbf{x}_j} = \frac{\mathbf{x}_j^\top (\mathbf{y} - \sum_{k=1}^p \mathbf{x}_k \theta_k + \mathbf{x}_j \theta_j)}{\|\mathbf{x}_j\|_2^2}$$

Moindre carrés

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{i,j})^2$$

Rappel : $\nabla f(\boldsymbol{\theta}) = X^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_p}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$

Minimiser en θ_j en fixant θ_k pour $k \neq j \Leftrightarrow$ annuler la j^{e} dérivée partielle

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_j^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{x}_j \theta_j + \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k \theta_k - \mathbf{y} \right)$$
$$\Leftrightarrow \theta_j = \frac{\mathbf{x}_j^\top (\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k \theta_k)}{\mathbf{x}_j^\top \mathbf{x}_j} = \frac{\mathbf{x}_j^\top (\mathbf{y} - \sum_{k=1}^p \mathbf{x}_k \theta_k + \mathbf{x}_j \theta_j)}{\|\mathbf{x}_j\|_2^2}$$

CD pour les moindres carrés

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

CD pour les moindres carrés

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

CD pour les moindres carrés

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

CD pour les moindres carrés

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / \|\mathbf{x}_j\|_2^2$

CD pour les moindres carrés

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / \|\mathbf{x}_j\|_2^2$

$$r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)}$$

CD pour les moindres carrés

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / \|\mathbf{x}_j\|_2^2$

$$r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)}$$

Impact mémoire faible :

- ▶ stocker un vecteur de résidus de taille n
- ▶ stocker un vecteur d'estimation de taille p

Rem: $\|\mathbf{x}_j\|_2^2 = 1$ utile en optimisation (\neq en statistique)

Sommaire

Descente par coordonnée

Définition et visualisation

Cas des moindres carrés

Cas de Ridge

Cas du Lasso

Cas non-convexes

Alternatives pour le Lasso

Ridge : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{i,j})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^p \theta_j^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{\theta}) = X^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\theta_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_p}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$$

Ridge : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{i,j})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^p \theta_j^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{\theta}) = X^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda \theta_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_p}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$$

Minimiser en θ_j en fixant θ_k pour $k \neq j \Leftrightarrow$ annuler la j^{e} dérivée partielle

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_j^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda \theta_j = \mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{x}_j \theta_j + \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k \theta_k - \mathbf{y} \right) + \lambda \theta_j$$
$$\Leftrightarrow \theta_j = \frac{\mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k \theta_k \right)}{\mathbf{x}_j^\top \mathbf{x}_j + \lambda} = \frac{\mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{y} - \sum_{k=1}^p \mathbf{x}_k \theta_k + \mathbf{x}_j \theta_j \right)}{\|\mathbf{x}_j\|_2^2 + \lambda}$$

Ridge : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \theta_j X_{i,j})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^p \theta_j^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{\theta}) = X^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\theta_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_p}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$$

Minimiser en θ_j en fixant θ_k pour $k \neq j \Leftrightarrow$ annuler la j^{e} dérivée partielle

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_j^\top (X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda\theta_j = \mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{x}_j\theta_j + \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k\theta_k - \mathbf{y} \right) + \lambda\theta_j$$
$$\Leftrightarrow \theta_j = \frac{\mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \mathbf{x}_k\theta_k \right)}{\mathbf{x}_j^\top \mathbf{x}_j + \lambda} = \frac{\mathbf{x}_j^\top \left(\mathbf{y} - \sum_{k=1}^p \mathbf{x}_k\theta_k + \mathbf{x}_j\theta_j \right)}{\|\mathbf{x}_j\|_2^2 + \lambda}$$

Ridge descent par coordonnée (II)

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

Ridge descent par coordonnée (II)

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

Ridge descent par coordonnée (II)

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

Ridge descent par coordonnée (II)

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / (\|\mathbf{x}_j\|_2^2 + \lambda)$

Ridge descent par coordonnée (II)

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / (\|\mathbf{x}_j\|_2^2 + \lambda)$

$$r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)}$$

Ridge descent par coordonnée (II)

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\theta^{(k)}$ et les coefficients $\theta^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / (\|\mathbf{x}_j\|_2^2 + \lambda)$

$$r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)}$$

Impact mémoire faible :

- ▶ stocker un vecteur de résidus de taille n
- ▶ stocker un vecteur d'estimation de taille p

Rem: $\|\mathbf{x}_j\|_2^2 = 1$ utile en optimisation (\neq en statistique)

Sommaire

Descente par coordonnée

Définition et visualisation

Cas des moindres carrés

Cas de Ridge

Cas du Lasso

Cas non-convexes

Alternatives pour le Lasso

Lasso : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\theta_j|$$

Minimise en θ_j avec les autres θ_k ($k \neq j$) fixes :

Lasso : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\theta_j|$$

Minimise en θ_j avec les autres θ_k ($k \neq j$) fixes :

$$\hat{\theta}_j = \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \dots, \theta_p)$$

Lasso : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\theta_j|$$

Minimise en θ_j avec les autres θ_k ($k \neq j$) fixes :

$$\hat{\theta}_j = \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \dots, \theta_p)$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \theta_j\|^2 + \lambda \sum_{k \neq j} |\theta_k| + \lambda |\theta_j|$$

Lasso : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\theta_j|$$

Minimise en θ_j avec les autres θ_k ($k \neq j$) fixes :

$$\hat{\theta}_j = \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \dots, \theta_p)$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \theta_j\|^2 + \lambda \sum_{k \neq j} |\theta_k| + \lambda |\theta_j|$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_j\|^2 \theta_j^2 - \langle \mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \theta_j + \lambda |\theta_j|$$

Lasso : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\theta_j|$$

Minimise en θ_j avec les autres θ_k ($k \neq j$) fixes :

$$\hat{\theta}_j = \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \dots, \theta_p)$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \theta_j\|^2 + \lambda \sum_{k \neq j} |\theta_k| + \lambda |\theta_j|$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_j\|^2 \theta_j^2 - \langle \mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \theta_j + \lambda |\theta_j|$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \|\mathbf{x}_j\|^2 \left[\frac{1}{2} \left(\theta_j - \|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle \mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)^2 + \frac{\lambda}{\|\mathbf{x}_j\|^2} |\theta_j| \right]$$

Lasso : descente par coordonnée

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta}) \text{ pour } f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\theta_j|$$

Minimise en θ_j avec les autres θ_k ($k \neq j$) fixes :

$$\hat{\theta}_j = \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} f(\theta_1, \dots, \theta_p)$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \theta_j\|^2 + \lambda \sum_{k \neq j} |\theta_k| + \lambda |\theta_j|$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_j\|^2 \theta_j^2 - \langle \mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \theta_j + \lambda |\theta_j|$$

$$= \arg \min_{\theta_j \in \mathbb{R}} \|\mathbf{x}_j\|^2 \left[\frac{1}{2} \left(\theta_j - \|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle \mathbf{y} - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)^2 + \frac{\lambda}{\|\mathbf{x}_j\|^2} |\theta_j| \right]$$

Rappel : $\eta_{\text{ST}, \lambda}(z) = \arg \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} (z - t)^2 + \lambda |t|$

Lasso : descente par coordonnée (II)

Solution :

$$\hat{\theta}_j = \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} \left(\|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle y - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)$$

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

Lasso : descente par coordonnée (II)

Solution :

$$\hat{\theta}_j = \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} \left(\|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle y - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)$$

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

Lasso : descente par coordonnée (II)

Solution :

$$\hat{\theta}_j = \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} \left(\|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle y - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)$$

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

Lasso : descente par coordonnée (II)

Solution :

$$\hat{\theta}_j = \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} \left(\|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle y - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)$$

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} (\mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / \|\mathbf{x}_j\|^2)$

Lasso : descente par coordonnée (II)

Solution :

$$\hat{\theta}_j = \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} \left(\|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle y - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)$$

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} (\mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / \|\mathbf{x}_j\|^2)$

$$r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)}$$

Lasso : descente par coordonnée (II)

Solution :

$$\hat{\theta}_j = \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} \left(\|\mathbf{x}_j\|^{-2} \langle y - \sum_{k \neq j} \theta_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle \right)$$

Mise à jour intelligente : stocker à l'itération k les résidus courants

$r^{(k)} = y - X\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ et les coefficients $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \eta_{\text{ST}, \lambda / \|\mathbf{x}_j\|^2} (\mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}} / \|\mathbf{x}_j\|^2)$

$$r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)}$$

Impact mémoire faible :

- ▶ stocker un vecteur de résidus de taille n
- ▶ stocker un vecteur d'estimation de taille p

Rem: $\|\mathbf{x}_j\|_2^2 = 1$ utile en optimisation (\neq en statistique)

Sommaire

Descente par coordonnée

Définition et visualisation

Cas des moindres carrés

Cas de Ridge

Cas du Lasso

Cas non-convexes

Alternatives pour le Lasso

Descente par coordonnée : cas non-convexe

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\lambda,\gamma}^{\text{pen}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \text{pen}_{\lambda,\gamma}(|\theta_j|)}_{\text{régularisation}} \right)$$

Même approche mais sans garantie de convergence globale

Descente par coordonnée : cas non-convexe

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\lambda,\gamma}^{\text{pen}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \text{pen}_{\lambda,\gamma}(|\theta_j|)}_{\text{régularisation}} \right)$$

Même approche mais sans garantie de convergence globale

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

Descente par coordonnée : cas non-convexe

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\lambda,\gamma}^{\text{pen}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \text{pen}_{\lambda,\gamma}(|\theta_j|)}_{\text{régularisation}} \right)$$

Même approche mais sans garantie de convergence globale

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire :

Descente par coordonnée : cas non-convexe

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\lambda, \gamma}^{\text{pen}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \text{pen}_{\lambda, \gamma}(|\theta_j|)}_{\text{régularisation}} \right)$$

Même approche mais sans garantie de convergence globale

$$r^{\text{int}} \leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)}$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, faire : $\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \eta_{\text{pen}_{\lambda, \gamma}}(\mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}})$

Descente par coordonnée : cas non-convexe

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\lambda,\gamma}^{\text{pen}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \text{pen}_{\lambda,\gamma}(|\theta_j|)}_{\text{régularisation}} \right)$$

Même approche mais sans garantie de convergence globale

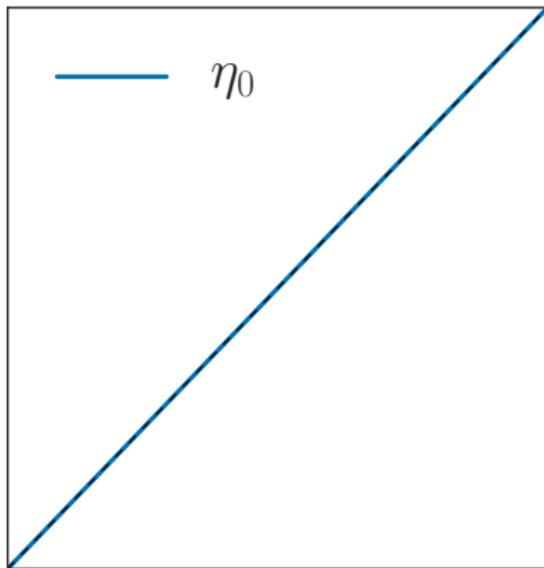
$$\begin{aligned} r^{\text{int}} &\leftarrow r^{(k)} + \mathbf{x}_j \theta_j^{(k)} \\ \text{Pour chaque } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ faire : } &\theta_j^{(k+1)} \leftarrow \eta_{\text{pen}_{\lambda,\gamma}}(\mathbf{x}_j^\top r^{\text{int}}) \\ &r^{(k+1)} \leftarrow r^{\text{int}} - \mathbf{x}_j \theta_j^{(k+1)} \end{aligned}$$

$$\text{où } \eta_{\text{pen}_{\lambda,\gamma}}(z) = \arg \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(z - t)^2 + \text{pen}_{\lambda,\gamma}(t)$$

et $\|\mathbf{x}_j\|_2^2 = 1$; voir par exemple [Breheny et Huang \(2011\)](#)

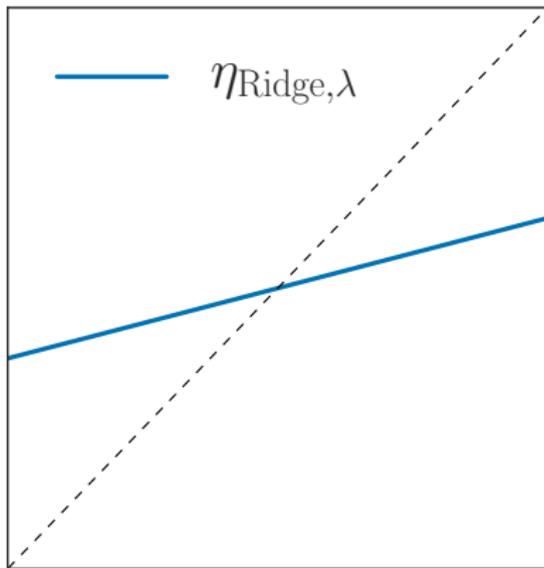
Régularisation en 1D : Aucune

$$\eta_0(z) = z$$



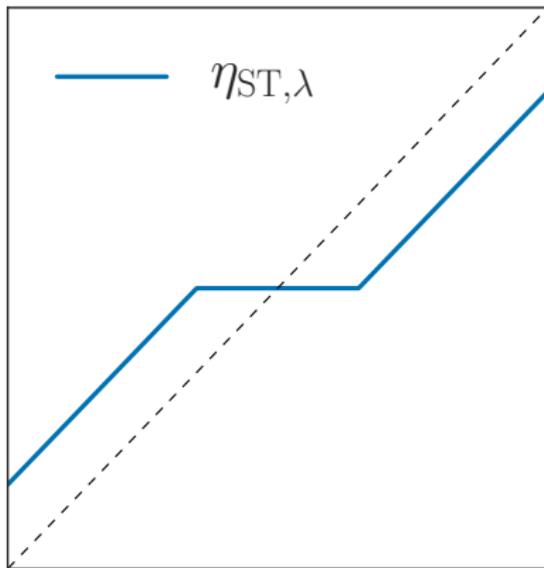
Régularisation en 1D : Ridge

$$\eta_{\text{Ridge},\lambda}(z) = \frac{z}{1 + \lambda}$$



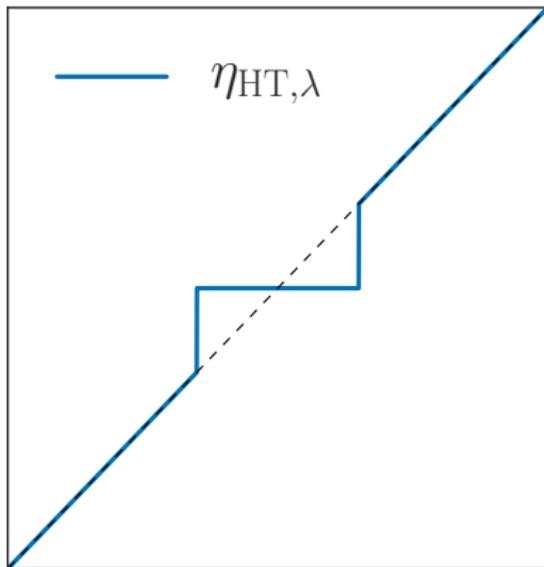
Régularisation en 1D : Lasso

$$\eta_{\text{ST},\lambda}(z) = \text{sign}(z)(|z| - \lambda)_+$$



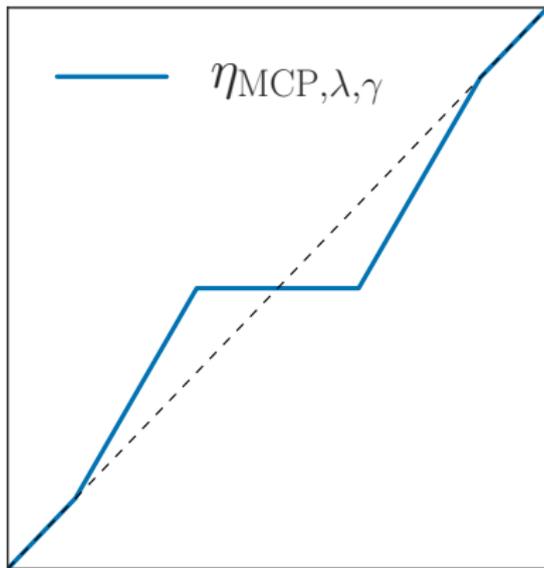
Régularisation en 1D : ℓ_0

$$\eta_{\text{HT}, \lambda^2/2}(z) = z \mathbf{1}_{|z| \geq \lambda}$$



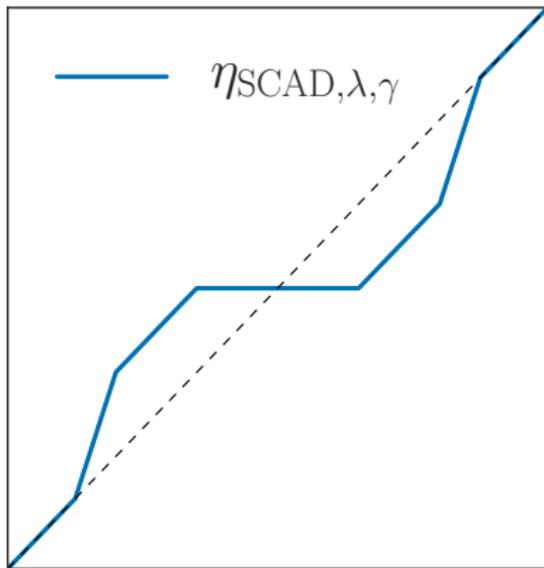
Régularisation en 1D : MCP

$$\eta_{\text{MCP},\lambda,\gamma}(z) = \begin{cases} \text{sign}(z)(|z| - \lambda)_+ / (1 - 1/\gamma) & \text{si } |z| \leq \gamma\lambda \\ z & \text{si } |z| > \gamma\lambda \end{cases}$$



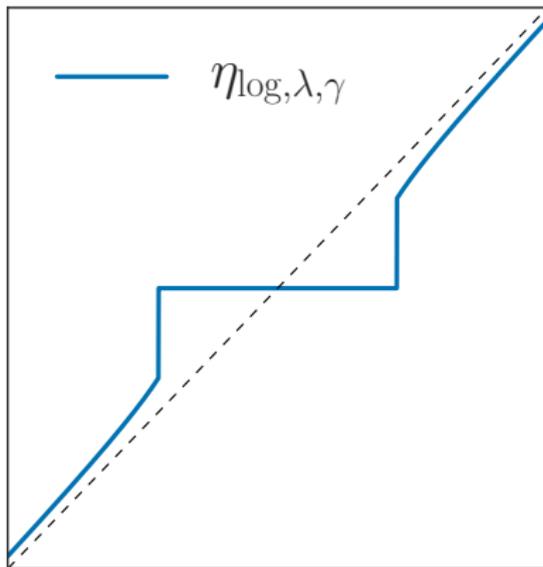
Régularisation en 1D : SCAD

$$\eta_{\text{SCAD},\lambda,\gamma}(z) = \begin{cases} \text{sign}(z)(|z| - \lambda)_+ / (1 - 1/\gamma) & \text{si } |z| \leq 2\lambda \\ ([\gamma - 1]z - \text{sign}(z)\gamma\lambda) / (\gamma - 2) & \text{si } 2\lambda \leq |z| \leq \gamma\lambda \\ z & \text{si } |z| > \gamma\lambda \end{cases}$$



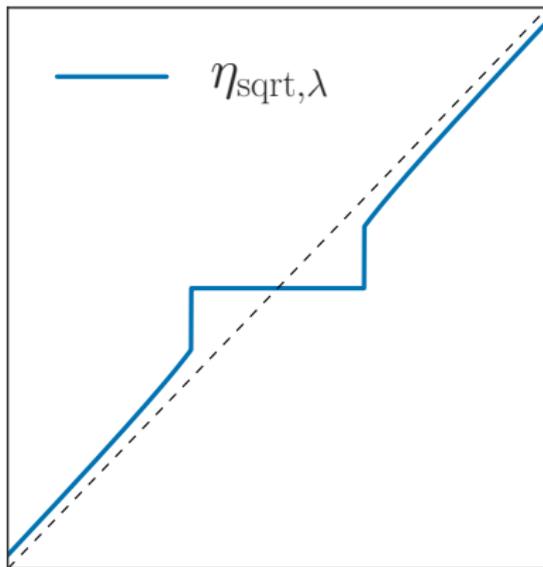
Régularisation en 1D : \log

$$\eta_{\log, \lambda}(z) = \dots$$

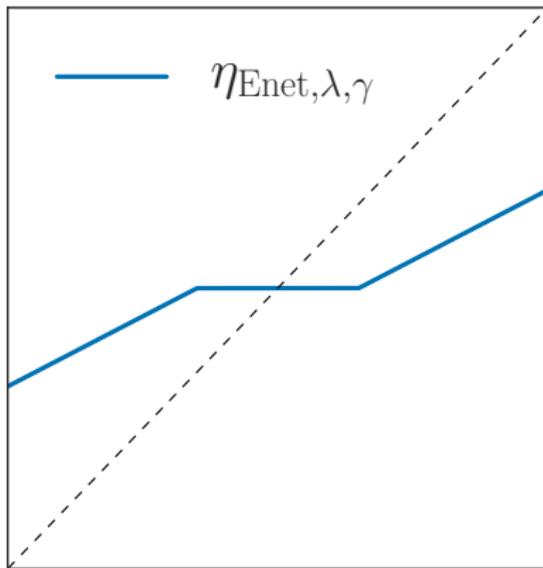


Régularisation en 1D : sqrt

$$\eta_{\text{sqrt},\lambda}(z) = \dots$$



$$\eta_{\text{Enet},\lambda,\gamma}(z) = \dots$$

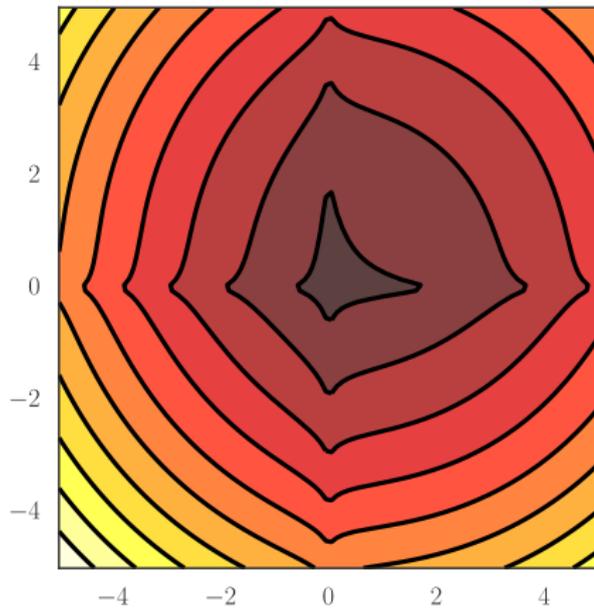


Lasso-Positif

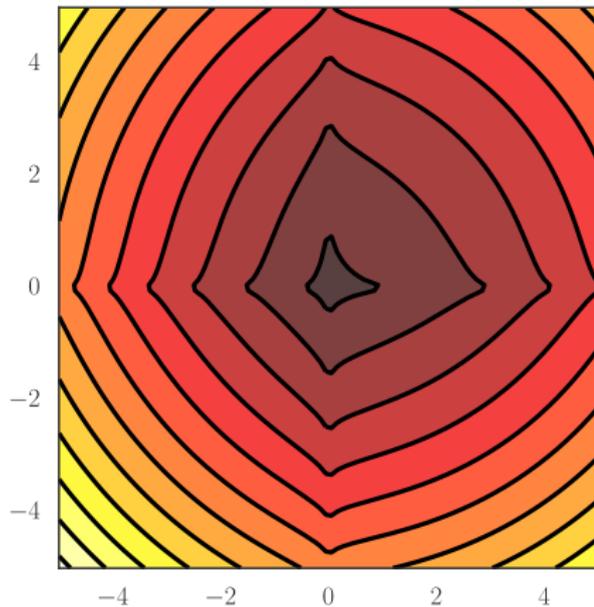
Exo: Proposer une manière de résoudre le problème Lasso avec une contrainte de positivité sur les coefficients

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\lambda}^{\text{Lasso}+} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_+^p} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_1}_{\text{régularisation}} \right)$$

Lignes de niveaux pour log



Lignes de niveaux pour sqrt



Optimisation pour le Lasso : autres méthodes

D'autres algorithmes peuvent être utilisés pour construire une solution approchée du Lasso :

- ▶ LARS Efron *et al.* (2004) pour le chemin entier. Celui-ci est affine par morceaux, et on peut calculer toutes les solutions par moindres carrés successifs
- ▶ méthodes de gradient proximal, Forward-Backward, de type Seuillage Doux Itératif ( : *ISTA*, *FISTA*), cf. Beck et Teboulle(2009) : algorithme qui consiste à alterner mise à jour par descente de gradient sur la partie lisse (quadratique) et seuillage de l'itéré

Ces dernières méthodes seront vues dans des cours ultérieurs (e.g., INFMDI 341)

Références I

- ▶ P. Breheny and J. Huang.
Coordinate descent algorithms for nonconvex penalized regression, with applications to biological feature selection.
Ann. Appl. Stat., 5(1) :232, 2011.
- ▶ A. Beck and M. Teboulle.
A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems.
SIAM J. Imaging Sci., 2(1) :183–202, 2009.
- ▶ B. Efron, T. Hastie, I. M. Johnstone, and R. Tibshirani.
Least angle regression.
Ann. Statist., 32(2) :407–499, 2004.
With discussion, and a rejoinder by the authors.
- ▶ P. Tseng.
Convergence of a block coordinate descent method for nondifferentiable minimization.
J. Optim. Theory Appl., 109(3) :475–494, 2001.