Université de Montpellier **HMMA307**
2019/2020 **Joseph Salmon**

TD N° 1 : Introduction et rappels

Exercice 1. Montrer que pour toute matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{Ker}(X) = \mathrm{Ker}(X^\top X)$. En déduire que les rangs suivants sont identiques : $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(X^\top X) = \mathrm{rg}(XX^\top) = \mathrm{rang}(X^\top)$.

Exercice 2. Montrer que $\hat{\beta}^{(\ell_2)} \triangleq X^+ y$ est une solution du problème des moindres carrés :

$$\operatorname*{arg\,min}_{\beta\in\mathbb{R}^p} \|y - X\beta\|^2 \quad , \tag{1}$$

avec $y \in \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, et que de plus parmi toutes les solutions, c'est la solution de norme (euclidienne) minimale.

Exercice 3.

1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\mathbb{1}_n}{\sqrt{n}} & \frac{\mathbb{1}_{C_1}}{\sqrt{n_1}} & \frac{\mathbb{1}_{C_2}}{\sqrt{n_2}} \end{bmatrix} \quad ,$$

en prenant des vecteurs $\mathbb{1}_{C_1}, \mathbb{1}_{C_2}$ les indicatrices d'ensembles C_1, C_2 formant une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, en supposant qu'il y a n_1 (resp. n_2) observations dans la classe C_1 (resp. C_2). On notera que $\mathbb{1}_{C_1} + \mathbb{1}_{C_2} = \mathbb{1}_n$, et $\mathbb{1}_{C_1}\mathbb{1}_{C_2} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

2) Donner X^+, la pseudo-inverse de la matrice X.

Exercice 4.

1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

sous la contrainte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1^\top x_2 = 0$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

2) Donner X^+, la pseudo-inverse de la matrice X.

Exercice 5.

1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & \mathbb{1}_{C_1} & \mathbb{1}_{C_2} \end{bmatrix} \quad ,$$

en prenant des vecteurs $\mathbb{1}_{C_1}, \mathbb{1}_{C_2}$ les indicatrices d'ensembles C_1, C_2 formant une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On notera que $\mathbb{1}_{C_1} + \mathbb{1}_{C_2} = \mathbb{1}_n$, et $\mathbb{1}_{C_1}\mathbb{1}_{C_2} = 0 \in \mathbb{R}^n$, on supposera qu'il y a n_1 (resp. n_2) observations dans la classe C_1 (resp. C_2).

Exercice 6.

1) Calculer la SVD de la matrice

$$X = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & \mathbb{1}_{C_1} & \dots & \mathbb{1}_{C_K} \end{bmatrix} \quad ,$$

en prenant des vecteurs $\mathbb{1}_{C_1}, \dots, \mathbb{1}_{C_K}$ les indicatrices d'ensembles $C_1, \dots, C_K$ formant une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On supposera qu'il y a $n_1, \dots, n_K$ observations dans les classe $C_1, \dots, C_K$. On pourra utiliser un solveur numérique pour vérifier le résultat ou encore `sympy`.